

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева

УДК 517.983

На правах рукописи

ҚАСЫМ АЙЖАН САҒЫМБАЙҚЫЗЫ

Весовые оценки для сингулярных дифференциальных операторов в функциональных пространствах

6D060100 – Математика

Диссертация на соискание степени
доктора философии (PhD)

Научный консультант
доктор физико-математических наук,
профессор
Л.К. Кусаинова

Зарубежный научный консультант
PhD, профессор
М. Lanza de Cristoforis
(Падова, Италия)

Республика Казахстан
Астана, 2026

СОДЕРЖАНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ.....	3
ВВЕДЕНИЕ	4
1 ОБ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЗАМКНУТОГО РАСШИРЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СИНГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ОСИ	25
1.1 Классы дифференцируемых функций в областях на прямой. Неравенства вложений	25
1.2 Условия существования замкнутого обратимого расширения оператора L_0	30
1.3 О наилучших линейных приближениях для решений уравнения $Ly = f$	51
2 ОБ АППРОКСИМАЦИИ ОДНОГО СИНГУЛЯРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НА ОСИ	56
2.1 Об операторе типа Трибеля на полуоси	56
2.2 О линейных аппроксимациях решений уравнения $Ty = f$	59
3 О ВЕСОВЫХ ОЦЕНКАХ ДЛЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ОСИ В ПРОСТРАНСТВАХ МУЛЬТИПЛИКАТОРОВ	69
3.1 О коэрцитивных оценках для обыкновенных дифференциальных операторов на полуоси	69
3.2 О разделимости оператора Штурма-Лиувилля	76
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	87
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	89

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

$\mathbb{R}^+$	– $[0, +\infty)$
BX	- единичный замкнутый шар в X .
$C_0^\infty(\Omega)$	- пространство бесконечно дифференцируемых и финитных в Ω функций.
$ \Omega $	- мера Лебега для $\Omega \subset \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.
$L_p(\Omega) (1 \leq p < \infty)$	- пространство Лебега с нормой $\ f\ _{L_p(\Omega)} = \ f; L_p(\Omega)\ = \left(\int_{\Omega} f(x) ^p dx \right)^{1/p}$
$L_{p,loc}(\Omega)$	- пространство всех $f \in L_p([a, b])$ на каждом отрезке $[a, b] \subset \Omega$, $L_{loc}(\Omega) = L_{1,loc}(\Omega)$.
$L_p^+(\Omega)$	- пространство всех почти всюду положительных функций из $L_p(\Omega)$.
$W_p^m(\Omega)$	- класс Соболева всех функций u , имеющих на Ω абсолютно непрерывную производную порядка $m - 1$ и конечную норму $\ u\ _{W_p^m(\Omega)} = \ u^{(m)}\ _{L_p(\Omega)} + \ u\ _{L_p(\Omega)}$.
$W = W_p^m(\rho, v)$	- пополнение $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $\ f\ _W = \ \rho f^{(m)}\ _{L_p(\Omega)} + \ vf\ _{L_p(\Omega)} \text{ для } \rho, v.$
$D(P)$	- область определения оператора P
$\text{Im}P$	- область значений оператора P
P^{-1}	- оператор, обратный оператору P

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования Дифференциальные операторы как математические модели используются для глубокого анализа во многих областях научных исследований таких, как математическая физика, теория случайных процессов, биология, финансовая математика и др. К примеру, приложения дифференциальных операторов в механике и инженерии описывают колебания в вязкоупругих средах и динамику систем с сопротивлением. В биологии это могут быть модели роста и распространения популяций с шумом (выбросы, миграции) и экологические модели с пространственно меняющимися параметрами.

Современные направления исследований дифференциальных операторов включают в себя как неотъемлемую часть задачи, связанные с дифференциальными операторами (уравнениями) с различного типа сингулярностями переменных коэффициентов. В число этих сингулярностей, в частности, входят условия негладкости, неограниченности, быстро растущие колебания, свойство альтернанса знаков переменных коэффициентов при подходе к граничным точкам области их задания:

1) задачи, связанные с вопросами ограниченности, замкнутости (для неограниченных операторов), обратимости. Здесь важное значение имеет выбор (или построение новых) функциональных пространств, в которых рассматриваются исследуемые операторы. Такие задачи решались в работах W.N. Everitt, M. Giertz [1, 2], К.Х. Бойматова [3], М.О. Отелбаева [4], А.А. Шкаликова, М.И. Нейман-заде [5], M. Hieber, L. Lorenzi, A. Rhandi, R. Schnaubelt [6], А.А. Беляев [7, 8], К.Н. Оспанова [9, 10], Л.К. Кусаиновой [11, 12] и др.;

2) весовые оценки решений дифференциальных уравнений, которые широко изучались в трудах многих авторов, в частности М.О. Отелбаева [13, 14], Р.О. Ойнарова [15], Л.К. Кусаиновой [16], А. М. Савчук [17], G. Metafuni, D. Pallara, J. Pruss [18], К.Н. Оспанова [19, 20], S. Monsurro, M. Transirico [21], К.А. Мирзоева [22] и др.;

3) задачи, связанные с выбором численных методов решения соответствующих дифференциальных уравнений. На языке функционального анализа это выражается: в выборе метода приближения решений конечномерными объектами; в задании меры приближения; в оценке точности приближения на n -м итерационном шаге. Такие задачи ранее решались П.И. Лизоркиным, М.О. Отелбаевым [23] и в настоящее время М.С. Айтиновой, Л.К. Кусаиновой [24, 25], М. Муратбековым [26], Н.К. Макиной, Э.Я. Назировой, Я.Т. Султанаевым [27-29] и др.

Цель исследования

Целью диссертационной работы является исследование определенных типов сингулярных обыкновенных дифференциальных операторов второго порядка на полуоси с коэффициентами, неограниченными в любой окрестности бесконечности.

Задачи исследований

1. Получить условия существования замкнутого расширения L для оператора:

$$L_0 y = -a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y, \quad x > 0,$$

с негладкими коэффициентами, не исключая случая, когда $a_j(\cdot)$ ($j = 0, 1$) альтернируют в любой окрестности $+\infty$, либо $\inf_{x>0} a_j(x) = -\infty$, ($j = 0, 1$).

Получить условия обратимости оператора L .

2. Получить теоремы о разделимости для оператора второго порядка в пространствах L_2 , в пространствах (точечных) мультипликаторов на паре весовых пространств Соболева, Лебега.

3. Получить оценки для наилучших линейных приближений решения уравнения:

$$Ly = f, f \in L_2(I), I = (0, +\infty).$$

4. Для оператора:

$$Ty = -\rho_0^\mu(x)y'' + q_1(x)y' + (q_0(x) + \rho_0^\nu(x))y$$

с условиями из класса Трибеля $\mathfrak{A}_{\mu,\nu}^1(I, \rho)$ при $x \rightarrow +\infty$, получить оценки линейных поперечников в пространстве $L_2(I)$ для множества решений уравнения:

$$Ty = f, \|f\|_{L_2(I)} \leq 1,$$

входящих в шар $\{\|y\|_V \leq C\}$ пространства V с нормой:

$$\|y\|_V = \left[\int_0^\infty \left(|\rho_0^\nu y''|^2 + \left| \rho_0^{\frac{\nu+\mu}{2}} y' \right|^2 + |\rho_0^\mu y|^2 \right) dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Объекты исследования Объектами исследования являются сингулярные обыкновенные дифференциальные операторы второго порядка на оси.

Основные методы исследования Методы данного исследования включают в себя методы функционального анализа, метод установления локальных связей между (переменными) коэффициентами исследуемых дифференциальных операторов и уравнений. Функциональный анализ обеспечивает теоретическую основу для исследования дифференциальных операторов и уравнений: точной формулировки цели исследования, выбора (или построения) функциональных пространств, в которых действуют исследуемые

операторы, в выборе (развитии) известных методов или построении новых для решения поставленных задач.

Метод установления локальных связей подразумевает установление мультипликативных связей между средними от коэффициентов на интервалах характеристической длины.

Научная новизна В ходе работы были получены следующие новые результаты:

1. Получены условия, при которых минимальный оператор:

$$L_0 y = -a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y$$

с возможно неограниченно альтернирующими при $x \rightarrow \infty$ коэффициентами a_j ($j = 0,1$), допускает замкнутое обратимое расширение L в $L_2(I)$. Получены коэрцитивные оценки для оператора L в пространствах L_2 , в пространствах (точечных) мультипликаторов на паре весовых пространств Соболева, Лебега.

Для решения этой задачи был применен метод локальных оценок на "характеристических" промежутках и выявлены внутренние связи между коэффициентами a_j ($j = 0,1,2$), при которых минимальный оператор L_0 допускает существование обратимого расширения. (раздел 1)

2. Получены оценки наилучших линейных приближений для решений уравнений вида

$$Ly = -a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f_l,$$

$$Ty \equiv -\rho_0^\mu(x)y'' + q_1(x)y' + (q_0(x) + \rho_0^\nu(x))y = f_t$$

в терминах специальных максимальных операторов, построенных на базисе отрезков «переменной длины» (раздел 2).

3. Для самосопряженного оператора Штурма-Лиувилля в $L_2(I)$, $I = (a, +\infty)$, $a > -\infty$:

$$Ly \equiv l[y] = -y'' + q(t)y$$

с потенциалом $q \geq 1$ из $L_2^{loc}(I)$ получена теорема о делимости в терминах мультипликаторов, построены примеры (раздел 3).

Теоретическая и практическая ценность Полученные результаты носят теоретический характер. Методы исследования и результаты могут найти применение в теории дифференциальных операторов и уравнений, в численных решениях сингулярных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Апробация работы Основные результаты диссертационной работы представлены и обсуждены:

- на международных научных конференциях: «Теоретические и прикладные вопросы математики, механики и информатики» (Караганда, 2019);

«Actual Problems of Analysis, Differential Equations and Algebra» (EMJ-2019) Dedicated to the 10th Anniversary of the Eurasian Mathematical Journal (Нур-Султан, 2019); «Проблемы современной фундаментальной и прикладной математики» (Нур-Султан, 2021).

- на научном семинаре «Функциональный анализ и его приложения» под руководством академиков НАН РК М. Отелбаева, Р.О. Ойнарова, профессоров Е.Д. Нурсултанова, К.Н. Оспанова (Астана, 2025);

- на научном семинаре «Seminario Dottorato» del Dipartimento di Matematica» под руководством профессоров Corrado Marastoni, Tiziano Vargiolu (Падова, 2021);

- на научном семинаре «Современные проблемы математики и информатики» под руководством д.ф.-м.н., профессора Нурсултанова Е.Д. (Астана, 2025).

Публикации Основной материал, представленный в диссертации, был опубликован в

1. On the separation property of the Sturm-Liouville operator in weighted spaces of multipliers // Journal of Mathematical Sciences. - 2019. - Vol. 241, №5, - P. 596-604.

2. On one Schrodinger type operator in weighted space. // The scientific heritage. - 2020. - Vol. 1, №52. - P. 19-22.

3. Об одном обратимом расширении несамосопряженного сингулярного дифференциального оператора на оси. // Дифференциальные уравнения. – 2021. - Т. 57, №10. - С. 1431-1435.

4. On approximation of one singular differential equation on the axis // Bulletin of the Karaganda university. Mathematics series. - 2022. - №4(108) - P. 86-97.

5. Об одной коэрцитивной оценке в пространствах мультипликаторов // Вестник КазНПУ им. Абая, серия «Физико-математические науки». - 2023. - №2(82) - С. 22-29.

6. О некоторых весовых оценках и их применениях в качестве теории дифференциальных операторов. // Международная научная конференция «Теоретические и прикладные вопросы математики, механики и информатики» (Караганда, 2019. - С. 33).

7. Коэрцитивные оценки для одного дифференциального оператора на оси в пространствах мультипликаторов // «Актуальные проблемы анализа, дифференциальных уравнений и алгебры»: международная конференция, посвященной 10-летию выпуска журнала «Eurasian Mathematical journal» (Нур-Султан, 2019. - С.40-42).

8. Об одной оценке для решений однородного дифференциального уравнения второго порядка. Международная научно-практическая конференция «Проблемы современной фундаментальной и прикладной математики» (Нур-Султан, 2021. - С.161-163).

Связь данной работы с другими научно-исследовательскими работами Тема диссертационного исследования соответствует приоритетному направлению развития «Научные исследования в области естественных наук»,

специализированное научное направление «Фундаментальные и прикладные исследования в области математики и механики». Часть результатов диссертации вошли в промежуточный отчет за 2021 г. по проекту AP08856104 «Дифференциальные операторы и сингулярными коэффициентами. Аппроксимативные характеристики. Спектр. Обратные задачи.» и за 2019 г. по проекту AP05133397 «Качественные и количественные характеристики сингулярных дифференциальных операторов. Мультипликаторы в теории дифференциальных операторов».

Структура и объем работ Работа объемом 92 страницы, состоит из введения, 3 разделов, заключения, списка литературы. Формулы во введении имеют сквозную нумерацию. Утверждения имеют двойную нумерацию: первое число - это номер раздела, а второе - собственный номер утверждения. Формулы в разделах имеют тройную нумерацию. Первое число - это номер раздела, второе - номер подраздела, третий - собственный номер формулы в разделе.

Основное содержание работы Перейдем к изложению основных результатов диссертационной работы, опубликованных в [30-33]. Обозначения, принятые в работе даны на с. 3.

В разделе 1 исследуется несамосопряженный оператор

$$L_0 f = -a_2(x)f'' + a_1(x)f' + a_0(x)f \quad (1)$$

заданный в классе $C_0^\infty(I)$ бесконечно дифференцируемых и финитных в $I = [0, \infty)$ функций. Коэффициенты $a_j \in L_{2, \text{loc}}(I)$ ($j = 0, 1, 2$), $a_2 > 0$ п.в. в I , $a_2^{-1} = 1/a_2 \in L_2(I)$.

Здесь решаются следующие задачи:

1. Задача о существовании замкнутого инъективного расширения L оператора L_0 в случае, когда коэффициенты a_j ($j = 0, 1$) могут менять знак и невырождены в любой окрестности $+\infty$ (мера Лебега множества $a_{j,(t)} = \{x \geq t: |a_j(x)| > 0\}$ положительна), а также не ставится условие $\inf_{x \geq t} a_j(x) \geq c_t$ ($c_t \in \mathbb{R}$).

2. Получение функциональных характеристик области определения $D(L)$ оператора L .

3. Задача о наилучшей аппроксимации решения уравнения

$$Ly = f, f \in L_2(I).$$

В п. 1.1 раздела даны необходимые определения и утверждения.

В п. 1.2 раздела были получены условия, при которых оператор L_0 допускает замкнутое инъективное расширение L с областью определения $D(L) \subset W = W_2^2(a_2^2, a_0^2)$, где W есть весовое пространство Соболева, определяемое как пополнение класса $C_0^\infty(I)$ по норме

$$\|y\|_W = \left(\int_0^\infty (|a_2(x)y''|^2 + |a_0(x)y|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Были получены функциональные характеристики пространства W , в частности, утверждение о вложении W в гильбертово пространство $L_2(I)$.

Метод исследований представляет собой естественное развитие метода «бегущих средних» М. Отелбаева, примененного в работе [14, с. 165-189], где исследовался самосопряженный оператор высокого порядка с неотрицательными гладкими коэффициентами.

Обозначим через $L_{loc}^+(\Omega)$ (Ω - промежуток в $\mathbb{R}$) класс невырожденных локально суммируемых в Ω функций $f \geq 0$ (весовых функций). Пусть $\mathfrak{R}_{x,h}$ совокупность всех аффинных функций $R(t) = c_0 + c_1 t$ ($c_0, c_1 \in \mathbb{R}$), для которых

$$\int_x^{x+h} |R|^2 dt = 1 \quad (x \geq 0, h > 0).$$

Далее, пусть $\rho, v \in L_{loc}^+(I)$, $\rho(\cdot) > 0$ в I , $\rho^{-1} = 1/\rho \in L_1(I)$. Положим

$$S^\#(x, h; v) = \inf_{R \in \mathfrak{R}_{x,h}} \int_x^{x+h} v(t) |R|^2 dt,$$

$$M^\#(x, h; \rho, v) = h^{3/2} \left(\int_x^{x+h} \rho^{-1} dt \right)^{1/2} (S^\#(x, h; v))^{1/2}.$$

Всякую функцию $h(x) > 0$, $x \geq 0$ будем называть функцией длины (ф.д.) в $I = [0, \infty)$.

Будем говорить, что весовая пара (ρ, v) допустима относительно ф.д. $h(\cdot)$, если

$$M^\#(x, h(x); \rho, v) \geq 1, \quad \forall x \geq 0. \quad (2)$$

Положим

$$h^\#(x) = h^\#(x; \rho, v) = \sup\{h > 0: M^\#(x, h; \rho, v) \leq 1\}.$$

Из того, что $R(t) \equiv h^{-1/2} \in \mathfrak{R}_{x,h}$ и $S^\#(x, h; v) \leq h^{-1} \int_x^{x+h} v dt$, следует:

$$M^\#(x, h(x); \rho, v) \leq h^2 \int_x^{x+h} \rho^{-1} dt \cdot \int_x^{x+h} v(t) dt, \quad (3)$$

$$M^\#(x, h(x); \rho, v) \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0 +.$$

Следовательно $h(x) > 0$.

Утверждение 1.1 Если $h = h^\#(x; \rho, v) < \infty$, то $M^\#(x, h; \rho, v) = 1$.

Из утверждения 1.1 следует, что пара (ρ, v) , для которой $h^\#(\cdot; \rho, v) < \infty$, допустима относительно ф.д. $h(\cdot) = h^\#(\cdot; \rho, v) < \infty$. Ф. д. $h(x) = h^\#(x; \rho, 1) < \infty$ ($x \geq 0$) т.к.

$$M^\#(x, h(x); \rho, 1) \geq \left(h^3 \int_x^{x+h} \rho^{-1} dt \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \infty \text{ при } x \rightarrow \infty.$$

Приведем здесь один класс весов $v(\cdot)$, для которых

$$0 < h^\# = h^\#(x; \rho, v) < \infty, \quad (x \geq 0). \quad (4)$$

Будем говорить, что вес $v \in L_{loc}^+(I)$ удовлетворяет условию регулярности $(\mathfrak{R})$ относительно ф.д. $h(\cdot)$, если существует такое η , $0 < \eta < 1$, что

$$\eta h(x)^{-1} \int_x^{x+h(x)} v dt \leq S^\#(x, h(x), v). \quad (5)$$

Пусть вес $v(\cdot)$ в I удовлетворяет условию регулярности (5). Тогда

$$M^\#(x, h(x); \rho, v) \geq h \left(\eta \int_x^{x+h} \rho^{-1} dt \cdot \int_x^{x+h(x)} v dt \right) \rightarrow \infty \text{ (при } h \rightarrow \infty),$$

откуда следует (4).

Утверждение 1.2 [24] Для любого $\delta \in (0, 1)$ существует независимое от $x \geq 0$, $h > 0$ число $\gamma = \gamma(\delta) > 0$ такое, что для всех $R \in \mathfrak{R}_{x,h}$ мера

$$|\{t \in [x, x+h]: |R(t)| \leq \gamma h^{-1/2}\}| \leq \delta h. \quad (6)$$

Пример 1 Функция $v(x) = (1+x)^{2m}$ ($m \in \mathbb{N}$) удовлетворяет условию регулярности $(\mathfrak{R})$ относительно любой функции длины $h(\cdot)$ в I с $\eta = \frac{\gamma^2}{2}$.

Определение. Будем говорить, что вес $v(\cdot)$ в I удовлетворяет слабому условию Макенхаупта (M_w) относительно базиса промежутков

$$B_{h(\cdot)} = \bigcup_{x \geq 0} \{\Delta = (a, b) \subset [x, x+h(x))\},$$

если существуют такие $0 < \delta, \tau < 1$, что

$$\int_e v \leq \tau \int_\Delta v \text{ как только } e \subset \Delta \in B_{h(\cdot)} \text{ и } |e| \leq \delta |\Delta|. \quad (7)$$

Запись $v \in M_w$ относительно ф.д. $h(\cdot)$.

Из утверждения 1.2 следует, что всякий вес $v \in M_w$ удовлетворяет условию $(\mathfrak{R})$ относительно ф.д. $h(\cdot)$, а именно, в силу (7):

$$R \in \mathfrak{R}_{x,h}, \quad h = h(x), \quad e_\gamma = \{t \in \Delta = [x, x+h]: |R(t)| \leq \gamma h^{-1/2}\} \Rightarrow$$

$$\int_{\Delta} v(t) |R|^2 dt \geq \gamma^2 h^{-1} \int_{\Delta \setminus e_\gamma} v \geq \gamma^2 (1 - \tau) \int_{\Delta} v,$$

откуда следует (5).

Функции $v(x) = |x|^\alpha$, $-1 < \alpha < \frac{1}{p-1}$, $p > 1$, удовлетворяют условию M_w относительно любой ф.д. $h(\cdot)$ см. [34].

Замечание Если пара (ρ, v) допустима относительно функции длины $h(\cdot)$, то имеет место оценка

$$h^\#(x; \rho, v) \leq h(x),$$

следующая непосредственно из неравенства (2).

Теорема 1.1 Пусть (a_2^2, a_0^2) допустима и a_0^2 удовлетворяет условию $(\mathfrak{R})$ относительно ф. д. $h(\cdot)$, $W = W_2^2(a_2^2, a_0^2)$, и пусть:

$$\mathcal{K}(x, h(x); a_2) = \max_{r=0,1} h(x)^{-r+\frac{3}{2}} \left[\int_x^{x+h(x)} a_2^{-2} dt \right]^{\frac{1}{2}} \leq c_1 < \infty \quad (x \geq 0),$$

$$\mathcal{N}(x, h(x); a_2, a_1) = \left[\int_x^{x+h(x)} a_1^2 dt \cdot \int_x^{x+h(x)} a_2^{-2} dt \right]^{\frac{1}{2}} \leq c_2 < \infty \quad (x \geq 0).$$

Тогда:

а) каждая фундаментальная по норме в W последовательность $\{f_k\} \subset C_0^\infty(I)$ имеет в $L_2(I)$ предел $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$;

б) функция f имеет непрерывную в $I = [0, \infty)$ производную $f' = \lim f'_k$ по норме в $L_2(I)$; для почти всех $x \in I$ существует конечная производная $f''(x)$, при этом $f'' = \lim f''_k$ в $L_1(I)$;

в) $a_r f^{(r)} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_r f_k^{(r)}$ в $L_2(I)$, $r = 0, 1, 2$;

д) имеет место оценка

$$\|f\|_{L_2(I)} \leq c \sup_{x \geq 0} \mathcal{K}(x, h(x); a_2) \|f\|_W, \quad f \in W.$$

Теорема 1.2 Пусть пара (a_2^2, a_0^2) допустима, а a_0^2 удовлетворяет условию регулярности $(\mathfrak{R})$ относительно функции длины $h(\cdot)$, и пусть

$$K(a_2, h(\cdot)) = \sup_{x \geq 0} \left\{ \max_{r=0,1} h(x)^{-r+\frac{3}{2}} \left[\int_x^{x+h(x)} a_2^{-2} dt \right]^{\frac{1}{2}} \right\} < \infty, \quad (8)$$

$$N(a_2, a_1; h(\cdot)) = \sup_{x \geq 0} \left(\int_x^{x+h(x)} a_1^2 dt \cdot \int_x^{x+h(x)} a_2^{-2} dt \right)^{1/2} < \infty. \quad (9)$$

Тогда оператор L_0 допускает замкнутое расширение

$$L: L_2(I) \rightarrow L_2(I), \quad D(L) \subset W = W_2^2(a_2^2, a_0^2). \quad (10)$$

Ниже всюду $K(a_2) = K(a_2, h^\#(\cdot))$, $N(a_2, a_1) = N(a_2, a_1; h^\#(\cdot))$.

Теорема 1.3 Пусть a_j ($j = 0, 1, 2$) удовлетворяют условиям теоремы 1.2.

Если к тому же

$$A(a_0, a_1, a_2) = \sup_{x \geq 0} \left(x \int_x^\infty w_-(t) dt \right)^{1/2} < \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad (11)$$

где

$$w_-(x) = \max \left\{ 0, -\frac{2a_0(x)a_2(x) - a_1^2(x)}{a_2^2(x)} \right\},$$

то оператор L в (10) обратим.

Пример 2 Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $A = \sqrt{2A_0 + A_1} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$, где

$$A_0 = \sup_{x \geq 0} x \int_x^\infty (1+t)^m a_2^{-1}(t) dt, \quad A_1 = \sup_{x \geq 0} x \int_x^\infty a_2^{-2}(t) dt.$$

Тогда оператор $L_0 y = -a_2(x)y'' + y' - (1+x)^m y$, имеет инъективное замкнутое расширение

$$L: L_2(I) \rightarrow L_2(I), \quad D(L) \subset W_2^2(I; a_2, (1+x)^{2m}).$$

Наиболее близкими по тематике исследований и постановкам задач к данной работе за последнее десятилетие являются работы [9, р. 63-73; 35-37]. Задача об обратимости замкнутого оператора L (в теореме 1.2) равносильна, в силу условия $a_2(\cdot) > 0$, задаче об обратимости оператора

$$\tilde{L}y = -y'' + r(x)y' + q(x)y \quad (12)$$

(при $r(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)}, q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)}$). Свойства операторов вида (12) существенно зависят от поведения $r(\cdot)$ и $q(\cdot)$ при $x \rightarrow \infty$ [38]. В работе [10, р. 129-133] одним из условий обратимости операторов вида (12) является следующее

$$\sup_{x>0} \left[\int_0^x q^2(t)dt \cdot \int_x^\infty r^2(t)dt \right] < \infty.$$

Обратимся к теоремам 1.2, 1.3.

Следствие 1.1 Пусть функция $q(\cdot) \in L_{2,loc}(I)$ и удовлетворяет условию:

(I) существуют такие $\alpha > \frac{1}{2}, m \in \mathbb{N}, \mu, m > \mu > 1/2$, что

$$q(x) \geq \alpha(1+x)^{m-\mu}.$$

Функция $r(x) = (1+x)^\nu \sin x^2, 0 < \nu < \frac{m-\mu}{2}$. Тогда оператор $\tilde{L}$ в (12) инъективен, как оператор, действующий из пространства $W_2^2(a_2^2, a_0^2)$ в $L_2(I)$, где $a_2(x) = (1+x)^\mu, a_0(x) = a_2(x)q(x)$.

Одной из целей в работах [9, р. 63-73; 39] была задача о разрешимости уравнения

$$Ay = -\rho(x)(\rho(x)y')' + r(x)y' + q(x)y = f, f \in L_2(\mathbb{R}) \quad (13)$$

при определенных сравнивающих условиях между регулярными функциями $\rho > 0, \rho', r, q$ и условиями на рост при $|x| \rightarrow \infty$, в частности такие, как: $r \geq \rho^2$,

$$\begin{aligned} \sup_{x>0} x \int_x^\infty |r^{-1}(t)|dt &< \infty, \\ \sup_{x>0} \left[\int_0^x q^2(t)dt \cdot \int_x^\infty r^{-2}(t)dt \right] &< \infty. \end{aligned}$$

Поскольку $\rho > 0$, рассматриваемая задача равносильна задаче об обратимости оператора

$$\tilde{A}y = -a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y, \quad y \in D(T) \quad (14)$$

с коэффициентами $a_2(x) = \rho(x), a_1(x) = -\rho'(x) + \frac{r(x)}{\rho(x)}, a_0(x) = \frac{q(x)}{\rho(x)}$.

Приведем здесь второе следствие из теорем 1.2, 1.3.

Следствие 1.2 Пусть $\rho(x) = (1+x)^\mu, \mu > 1/2, r(\cdot), q(\cdot)$ - функции из класса $L_{2,loc}(I)$, удовлетворяют условиям: существуют такие $\alpha > \frac{1}{2}, 0 < \beta < 1, m \in \mathbb{N}, m > \mu, 0 < \nu < \frac{m-\mu}{2}$, что для п.в. x в I

$$\begin{aligned} \text{(II)} \quad & q(x) > \alpha(1+x)^{m+\mu}, \\ \text{(III)} \quad & |r(x) - \mu(1+x)^{2\mu-1}| \leq \beta(1+x)^{\nu+\mu}. \end{aligned}$$

Тогда оператор $\tilde{A}$ в (14) инъективен, как оператор действующий из $W = W_2^2(a_2^2, a_0^2)$ в $L_2(I)$.

В п. 1.3 рассмотрена задача о наилучшей линейной аппроксимации решений уравнения

$$Ly = f, \quad f \in BL_2(I) \quad (15)$$

в случае, когда оператор L в (10) имеет (необязательно ограниченный) обратный оператор и удовлетворяет квазиоэрцитивному условию:

$$\|y\|_W \leq c(\|Ly\|_2 + \|y\|_X), \quad y \in D(L) \quad (16)$$

где X - полунормированное пространство функций, определенных на $I = [0; \infty)$, $BL_2(I)$ - единичный замкнутый шар в $L_2(I)$. При этом предполагается, что $W \hookrightarrow X$. Из данного вложения и неравенства (16) следует, что каждое решение y уравнения (15) входит в один из классов

$$F_k = kBX \cap c_k BW, \quad c_k = c_0(1+k), \quad k = 1, 2, 3 \dots$$

Действительно, в силу вложения $W \hookrightarrow X$ следует, что

$$y = L^{-1}f \in X$$

и

$$\|y\|_W \leq c_0(1+k_y),$$

где $k_y = \min\{k \in \mathbb{N}: \|y\|_X \leq k\}$, существует такая c_0 , что $\|y\|_X \leq c_0\|y\|_W, y \in W$.

Введем обозначения. Пусть E_1, E_2 - банаховы пространства, $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{U}(E_1 \rightarrow E_2)$, - множество всех ограниченных линейных операторов, действующих из E_1 в E_2 , $\mathfrak{U}_n = \mathfrak{U}_n(E_1 \rightarrow E_2)$, - семейство всех линейных операторов $U: E_1 \rightarrow E_2$ размерности $\leq n$. Положим $\|S\| = a_0(S; E_1, E_2)$.

Определение [40] Пусть $S \in \mathfrak{U}(E_1 \rightarrow E_2)$. Величина

$$a_n(S; E_1, E_2) = \inf\{\|S - U\|, U \in \mathfrak{U}_n(E_1 \rightarrow E_2)\},$$

называется n -м аппроксимативным числом оператора S .

Легко увидеть, что

$$\|S\| = a_0(S; E_1, E_2) \geq a_1(S; E_1, E_2) \geq \dots \geq a_n(S; E_1, E_2) \geq a_{n+1}(S; E_1, E_2) \geq \dots$$

Оценка сверху аппроксимативных чисел $a_n(\mathcal{L}; W; L_2(I))$ оператора вложения $\mathcal{L}: W \hookrightarrow L_2(I)$ позволяет получить оценку наилучшего приближения линейными методами множества решений из $c_k BW$ уравнения (15) т.к.

$$\begin{aligned} & \inf_{U \in \mathcal{U}_n} \sup_{y \in cBW} \|y - Uy\|_{L_2(I)} = \\ & = c \inf_{U \in \mathcal{U}_n} \sup_{y \in BW} \|y - Uy\|_{L_2(I)} = ca_n(\mathcal{L}; W; L_2(I)). \end{aligned}$$

Через $N(\lambda; \mathcal{L}(\Omega))$ будет обозначаться считающая функция

$$N(\lambda; \mathcal{L}(\Omega)) = \sum_{a_k(\mathcal{L}(\Omega)) > \lambda} 1,$$

где $a_k(\mathcal{L}(\Omega)) = a_k(\mathcal{L}(\Omega); W(\Omega), L_2(\Omega))$, $\mathcal{L}(\Omega)$ – оператор вложения $W(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega)$, $(\Omega$ – интервал в I).

Введем максимальный оператор по базису промежутков, соотнесенному функции длины $h(\cdot)$ в I . Пусть:

$$\mathcal{B}_x = \{\Delta = [\alpha, \beta): x \in \Delta \text{ и } \exists \Delta y = [y, y + h(y)) \supset \Delta\},$$

$$Mf(x, h(\cdot)) = \sup_{\Delta \in \mathcal{B}_x} \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} |f(t)| dt, \quad f \in L_{loc}(I).$$

Далее пусть $h^\#(x) = h^\#(x; \rho, a_0^2)$, $\Omega(\lambda) = \{x > 0: h^\#(x; \rho, 4\eta a_0^2) M\rho^{-1}(x, h^\#(\cdot)) > \frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\}$, где $\rho = a_2^2$, $0 < \eta < 1$,

$$\Psi(\lambda) = \lambda^{-\frac{1}{2}} \left[\int_{\Omega(\lambda)} \left(M\rho^{-1}(x; h^\#(\cdot)) \right)^{\frac{1}{4}} dx \right], \quad \lambda > 0,$$

функция $\Psi(\cdot)$ строго монотонно убывает на оси $(0, \infty)$. Пусть $\Phi(\cdot)$ обратная к $\Psi(\cdot)$.

Теорема 1.4 Пусть выполнены условия:

i) $a_0^2 \geq 1$ удовлетворяет условию регулярности $(\mathfrak{R})$ относительно ф. д. $h^\#(x)$ с постоянной η , и пусть

$$\begin{aligned} & \sup_{x \geq 0} h^\#(x)^3 \int_x^{x+h^\#(x)} a_2^{-2} dt < \infty, \\ & \lim_{x \rightarrow \infty} h^\#(x)^3 \int_x^{x+h^\#(x)} a_2^{-2} dt = 0. \end{aligned}$$

ii) пространство $W = W_2^2(a_2^2, a_0^2)$ вложено в полунормированное пространство X и имеет место оценка (16). Тогда для всех решений $y \in kBX$ уравнения (15)

$$\inf_{U \in \mathcal{U}_n} \|y - Uy\|_{L_2(I)} \leq c_k \Phi\left(\frac{n}{8}\right) \quad (n \geq 10). \quad (17)$$

Во втором разделе рассматривается оператор

$$Ty = -\rho_0^\mu(x)y'' + q_1(x)y' + (q_0(x) + \rho_0^\nu(x))y \quad (\mu > 0, \nu > \mu + 2) \quad (18)$$

с коэффициентами $\rho_0 \geq 1$, q_0, q_1 из пространства $C^\infty(I)$, удовлетворяющими условиям:

- i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \rho_0(x) = \infty$,
- ii) $|\rho_0^{(k)}(x)| = O(\rho_0^{1+k}(x))$, $k = 0, 1, \dots$, при $x \rightarrow \infty$,
- iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{q_0^{(k)}(x)}{\rho_0^{\nu+k}(x)} = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{q_1^{(k)}(x)}{\rho_0^{k+(\nu+\mu)/2}(x)} = 0$.

Запись $|f| = O(g)$ при $x \rightarrow \infty$ означает, что существуют такие $c > 0, a > 0$, что $|f(x)| \leq cg(x)$ как только $x \geq a$.

Полагая $b_1 = -1, b_0 = 1, a_k(x) = q_k(x), k = 0, 1, \nu > \mu + 2$, мы можем записать оператор T в (18) как

$$Ty = \sum_{k=0}^1 \rho^{\kappa_{2k}}(x) b_k(x) y^{(2k)} + \sum_{k=0}^1 a_k(x) y^{(k)},$$

$\kappa_s = \frac{1}{2}(\nu(2-s) + \mu s)$, $s = 0, 2$, с коэффициентами $\rho(x) = \rho_0(x)$, $a_k(x)$, $b_k(x)$ ($k = 0, 1$), удовлетворяющими условиям переменных коэффициентов операторов из класса Трибеля $\mathcal{U}_{\mu, \nu}^m(\Omega; \rho)$ при $m = 1$, $\Omega = I$ (см. [41]), но только при $x \rightarrow +\infty$.

Класс $\mathcal{U}_{\mu, \nu}^m(\Omega; \rho)$ является довольно широким классом дифференциальных операторов, связанных с исследованием ядерных функциональных пространств.

В силу условия i) существует такое $t > 0$, что $\rho_0(x) > 1$ при $x \geq t$. Поэтому всюду ниже будем полагать $\rho_0 \geq 1$.

В п. 2.1 рассмотрен вопрос о разрешимости уравнения

$$Ty \equiv -\rho_0^\mu(x)y'' + q_1(x)y' + (q_0(x) + \rho_0^\nu(x))y = f, \quad f \in L_2(I) \quad (19)$$

Обозначим через $V = V_{2, (\mu, \nu)}^2(I)$ пополнение класса $C_0^\infty(I)$ бесконечно дифференцируемых и финитных в I функций по норме:

$$\begin{aligned} \|y\|_V &= \|y; V_{2,(\mu,\nu)}^2(\rho_0)\| = \\ &= \left[\int_0^\infty \left(|\rho_0^\mu y''|^2 + |\rho_0^{(\nu+\mu)/2} y'|^2 + |\rho_0^\nu y|^2 \right) dx \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Из условий ii) и iii) следует, что

$$\sup_{x \geq 0} |q_0(x) \rho_0^{-\nu}(x)| = \beta_0 < \infty, \quad \sup_{x \geq 0} |q_1(x) \rho_0^{-\frac{\nu+\mu}{2}}(x)| = \beta_1 < \infty. \quad (20)$$

Тогда для минимального оператора

$$T_0 = Ty, \quad y \in C_0^\infty(I)$$

имеет место оценка

$$\|T_0 y\|_{L_2(I)} \leq (1 + \beta_0 + \beta_1) \|y\|_V, \quad (21)$$

из которой следует, что оператор $T_0: V \rightarrow L_2(I)$ ограничен и имеет замкнутое расширение T с областью определения

$$D(T) \subset V_{2,(\mu,\nu)}^2(\rho_0).$$

Мы определились с оператором T в (19). Норма $\|T\| \leq 1 + \beta_0 + \beta_1$.

Теорема 2.1 Пространство V состоит из функций $y \in L_2(I)$, имеющих п.в. в I конечные производные y', y'' и норму $\|y\|_V < \infty$.

Теорема 2.2 Пусть выполнены условия

$$\beta_0 = \sup_{x \geq 0} |q_0(x) \rho_0^{-\nu}(x)| < 1,$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2(1 + \beta_0)} \sup_{x \geq 0} \left[\left((\rho_0^\mu)'(x) \right)^2 + (q_1(x))^2 \right] \rho_0^{-(\nu+\mu)}(x) < 1. \quad (22)$$

Тогда оператор T имеет обратный T^{-1} . При этом

$$\|T^{-1}: L_2(I) \rightarrow L_2(I)\| \leq C = \frac{1}{(1 - \beta_0)(1 - \beta_2)}. \quad (23)$$

В п. 2.2 была рассмотрена задача о наилучших линейных приближениях решений уравнения (19).

Рассмотрим задачу о наилучших линейных приближениях для решений уравнения

$$Ty \equiv -\rho_0^\mu(x) y'' + q_1(x) y' + (q_0(x) + \rho_0^\nu(x)) y = f, \quad f \in L_2(I). \quad (24)$$

В этом подразделе мы полагаем выполненными условия теорем 2.1-2.2. Понятно, что можно ограничиться решениями уравнения (24) с правой частью $f \in BL_2(I)$. Множество $F = \{y \in D(T): \|Ty\|_{L_2(I)} \leq 1\}$. Из (23) следует, что множество

$$F = T^{-1}(BL_2(I)) \cap D(T) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k,$$

где $F_k = k(BV)$.

Пусть Q - ограниченное множество в банаховом пространстве X , содержащее 0, $\mathcal{U}_k(Q, X)$ - класс всех непрерывных линейных операторов $U: X \rightarrow X$ размерности $\leq n$ (включая оператор $U = 0$). Величину

$$\lambda_n(Q, X) = \inf_{U \in \mathcal{U}_n(X)} \sup_{x \in Q} \|x - Ux\|_X$$

называют линейным n -поперечником Q в X . Поперечники $\lambda_n(Q, X)$ связаны с задачей о наилучшем (линейном) методе приближения множества Q в X .

Из равенства $\lambda_n(F_k, L_2(I)) = k\lambda_n(BV; L_2(I))$ следует, что достаточно получить оценку для считающей функции

$$\mathcal{N}(\lambda; BV, L_2(I)) = \sum_{\lambda_n(BV, L_2(I)) > \lambda} 1.$$

Пусть $\rho, v \in L_{loc}^+(I)$, $\rho > 0$, $\rho^{-1} = 1/\rho \in L_{loc}(I)$, $\delta \in (0, 1)$. Положим

$$S_{(\delta)}(x, h; v) = \inf_{\{e\}_\delta} \int_{\Delta \setminus e} v dt, \quad \Delta = [x, x + h],$$

где $\inf$ берется по совокупности $\{e\}_\delta$ всех замкнутых множеств $e \subset \Delta$ с мерой $|e| \leq \delta|\Delta| = \delta h$,

$$M_{(\delta)}(x, h; \rho, v) = h \left(\int_x^{x+h} \rho^{-1} dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(S_{(\delta)}(x, h; v) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Пусть $h(\cdot)$ - положительная конечная функция в I . Функцию $h(\cdot)$ будем называть функцией длины в I (по отношению к паре (ρ, v)), если

$$M_{(\delta)}(x, h(x); \rho, v) \geq 1, (x \in I). \quad (25)$$

Будем говорить, что пара (ρ, v) допустима относительно ф.д. $h(\cdot)$ в I , если выполняется (25).

Положим

$$h_{(\delta)}(x; \rho, v) = \sup\{h > 0: M_{(\delta)}(x, h; \rho, v) \leq 1\}. \quad (26)$$

Поскольку $\lim M_{(\delta)}(x, h; \rho, v) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0+$, то $h_{(\delta)}(x; \rho, v) > 0$ в I .

Пример 3 Пусть $\rho(x) = (1 - \delta)(1 + x)^\mu$, $v(x) = (1 + x)^\lambda$, $\lambda > \mu > 1$. Тогда (ρ, v) допустима относительно ф.д. $h(x) = (1 + x)^{(\mu - \lambda)/4}$.

Ниже мы покажем, что пара (ρ, v) , где $\rho = \rho_0^{2\mu}$, $v = (q_0 + \rho_0^\nu)^2$ допустима относительно ф.д. $h_{(\delta)}(x; \rho, v)$.

Утверждение 2.1

а) если

$$h_{(\delta)}(x; \rho, v) < \infty, \quad (27)$$

то имеет место равенство

$$M_{(\delta)}(x, h_{(\delta)}(x; \rho, v); \rho, v) = 1. \quad (28)$$

б) если $\rho = \rho_0^{2\mu}$, $v = (q_0 + \rho_0^\nu)^2$, то

$$h_{(\delta)}(x) = h_{(\delta)}(x; \rho, v) < \infty \quad (x \geq 0).$$

Замечание Если $h(\cdot)$ функция длины по отношению к паре (ρ, v) , то $0 < h_{(\delta)}(x; \rho, v) \leq h(x)$, $(x \geq 0)$.

Введем максимальный оператор по базису промежутков, соотнесенному функции длины $h(\cdot)$ в I . Пусть

$$\mathcal{B} = \bigcup_{y \geq 0} \{\Delta = [\alpha, \beta): y \leq \alpha < \beta \leq y + h(y)\}, \quad \mathcal{B}_x = \{\Delta = \mathcal{B}: x \in \Delta\}.$$

Положим

$$\begin{aligned} M^*f(x, h(\cdot)) &= \sup_{\Delta \in \mathcal{B}_x} \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} |f(t)| dt, f \in L_{loc}(I), \\ M_{(\delta)}^*f(x) &= M^*f(x, h_{(\delta)}(\cdot)), \\ K_{(\delta)}(x, h; \rho, v) &= h^{\frac{3}{2}} \left[\int_x^{x+h} \rho^{-1}(t) dt \right]^{\frac{1}{2}}, \quad h = h_{(\delta)}(x; \rho, v), \\ K_{(\delta)}(x) &= h^{3/2} \left[\int_x^{x+h} \rho_0^{-2\mu}(t) dt \right]^{1/2}, \quad \text{если } \rho = \rho_0^{2\mu}, v = \rho_0^{2\nu}. \end{aligned}$$

Теорема 2.3 Пусть

$$\lim_{x \rightarrow \infty} K_{(\delta)}(x) = 0 \quad \left(0 < \delta < \frac{1}{2}\right).$$

Тогда существует такое $c(\delta) > 1$, что

$$\mathcal{N}(\lambda; F_k, L_2(I)) \leq \sqrt{\frac{c}{\lambda}} \int_{G(c^{-1}\lambda)} (M_{(\delta)}^* \rho_0^{-2\mu})^{\frac{1}{4}} dx,$$

где

$$G(\lambda) = \left\{ x > 0 : h_{(\delta)}(x) (M_{(\delta)}^* \rho_0^{-2\mu})^{\frac{1}{4}} > \lambda^{\frac{1}{2}} \right\},$$

$$c = 4kc(\delta)c(\mu, \nu).$$

Пример 4 Рассмотрим уравнение

$$Ty \equiv -(3+x)^\mu y'' + q_1(x)y' + (q_0(x) + (3+x)^{2\nu})y = f \quad (29)$$

при следующих условиях: $q_0, q_1 \in C^\infty(I)$ удовлетворяют условиям iii) относительно $\rho_0(x) = 3+x$, и

$$\sup_{x \geq 0} |q_0(x)|(3+x)^{-\nu} = \beta_0 \leq \frac{3}{4}, \quad \sup_{x \geq 0} |q_1(x)|(3+x)^{\frac{\nu+\mu}{2}} = \beta_1 < \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2} < \mu < 2 < \nu - \mu.$$

Тогда $\beta_1 < \frac{3}{5}$ и в силу теоремы 2.2 для оператора T в (29) существует T^{-1} с нормой

$$\|T^{-1}\| \leq ((1 - \beta_0)(1 - \beta_1))^{-1} < 4 \cdot \frac{5}{2} = 10.$$

Следовательно, множество решений уравнения (29) с правой частью $f \in L_2(I)$ содержится в шаре $10BV$.

В разделе 3 получены коэрцитивные оценки для дифференциальных операторов 2-го порядка на оси как в классическом понимании, так и в терминах (точечных) мультипликаторов.

Пусть X, Y, V - нормированные пространства функций $y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, Ω - промежутки в $\mathbb{R}$. В разделе 3 получены оценки вида

$$\|y\|_V \leq C(\|Qy\|_Y + \|y\|_X) \quad (30)$$

для решений уравнения

$$Qy = f, \quad f \in Y, \quad (31)$$

где Q – (обыкновенный) дифференциальный оператор в X , с коэффициентами из класса $L_{p,loc}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

Оценку вида (30) называют коэрцитивной оценкой. Коэрцитивные оценки раскрывают те или иные функциональные характеристики решений дифференциального уравнения (31). В современных работах понятие «коэрцитивной оценки» расширяются (см [42, 43]).

В п. 3.1 мы исследуем оператор

$$Ly = -a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y$$

в пространствах (точечных) мультипликаторов $M(X \rightarrow Y)$, где X - весовое пространство Соболева, Y - пространство Лебега на оси I .

Точечные мультипликаторы возникают во многих областях математического анализа и его приложений. К примеру, условия ограниченности, разделимости дифференциальных операторов, действующих в паре пространств Соболева (W_p^m, W_p^l) , $0 \leq l < m$, можно выразить через оценки нормы переменных коэффициентов как мультипликаторов [8, с. 76-95; 44].

Определение [44, с. 14-136] Пусть X, Y – нормированные пространства функций $y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ($\Omega \subset \mathbb{R}$). Функцию $z: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ называют (точечным) мультипликатором из X в Y , если $zy \in Y$ для всех $y \in X$.

Через $M(X \rightarrow Y)$ будем обозначать класс всех мультипликаторов из X в Y , для которых оператор умножения $U_z y = zy$ ограничен как оператор из X в Y . В линейное пространство $M(X \rightarrow Y)$ вводится норма оператора

$$\|z; X \rightarrow Y\| = \|U_z; X \rightarrow Y\| = \sup_{0 \neq y \in X} \frac{\|zy\|_Y}{\|y\|_X}.$$

См. [44, с. 4-400; 45].

Обоснуем постановку задачи о коэрцитивных неравенствах в пространствах мультипликаторов. В [44, с. 26-39] было получено коэрцитивное неравенство ($m > l \geq k \geq 0$):

$$\|u\|_{M(W_p^m \rightarrow W_p^l)} \leq c \left(\|Pu\|_{M(W_p^m \rightarrow W_p^{l-k})} + \|u\|_{M(W_p^{m-l} \rightarrow L_p)} \right), \quad (32)$$

для оператора $Pu = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha D^\alpha u$ с постоянными коэффициентами c_α , действующего из пространства

$$D(P) = X \cap W_{p,loc}^l \subset X = M(W_p^{m-l} \rightarrow L_p) \text{ в } Y = M(W_p^m \rightarrow W_p^{l-k}).$$

Понятие разделимости (коэрцитивных неравенств) для дифференциальных операторов было введено в работах [1, р. 308-325; 46]. В дальнейшем появились

работы, в которых понятие разделимости (коэрцитивного неравенства) было расширено. См. к примеру [26, р. 217-229; 47]. Так в [47, с. 4-86] дано понятие V -коэрцитивного неравенства

$$\operatorname{Re}(Au, u)_H \geq C \|u\|_V^2$$

для ограниченного оператора $A: V \rightarrow V''$. Здесь V, H - гильбертовы пространства с условием плотного вложения $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V''$, $(\cdot, \cdot)$ - скалярное произведение в H .

Пусть $w(\cdot)$ - весовая функция в I , $V_p^m(\Omega; w)$ - пополнение класса $C_0^\infty(I)$ по норме

$$\|y\|_{V_p^m(\Omega; w)} = \sum_{r=0}^m \|wy^{(r)}\|_{L_2(\Omega)}.$$

При $w = 1$ $V_p^m(\Omega; w) = V_p^m$. Положим $K = K(h(\cdot); a_2)$, $N = N(h(\cdot); a_2, a_1)$.

Теорема 3.1 Пусть выполнены условия теоремы 1.2, a_2 возрастает и существует такое $\beta > 1$, что

$$a_2(k+1) \leq \beta a_2(k) \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Тогда имеет место импликация

$$Lz \in M(V_2^3(a_2) \rightarrow L_2(I)) \Rightarrow z \in M(V_2^3(a_2) \rightarrow L_2(I)).$$

Норма

$$\begin{aligned} \|z\|_{M(V_2^3(a_2) \rightarrow L_2(I))} &\leq \|Lz\|_{M(V_2^3(a_2) \rightarrow L_2(I))} + \\ &+ c(\beta, \eta)(1 + N)(\|a_2^{-1}\|_{L_2(I)} + K)\|z\|_{W_2^2(a_2, a_0)}. \end{aligned}$$

Пример 5 Пусть $a_2 > 0$ имеет непрерывную производную $a_2' > 0$, и пусть:

i) $a_0(x) = (1+x)^m \leq \beta_1 a_2(x)$, $x \geq 0$ ($m \in \mathbb{N}$, $\beta_1 > 1$);

ii) $\sup_{x \leq t \leq x+1} a_2'(t) \leq c a_2(x)$ ($x \geq 0$);

iii) функции $a_2^{-1}, a_1 \in L_2(I)$.

Тогда: 1. $a_0^2 - (\mathfrak{R})$ -регулярна относительно ф.д. $h(x) = h^\#(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{h > 0: M(x, h(x); a_2^2, a_0^2) \leq 1\}$. 2. Пара (a_2^2, a_0^2) допустима относительно ф.д. $h(x) = h^\#(x; a_2^2, a_0^2)$.

В п. 3.2 раздела получены коэрцитивные оценки для оператора Штурма-Лиувилля

$$Ly = -y'' + q(x)y \tag{33}$$

в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$ и в пространствах мультипликаторов на паре (W_2^m, L_2) .

Определение [4, с. 213-238] Оператор L назовем разделимым, если имеет место оценка

$$\|y''\|_2 + \|qy\|_2 \leq C(\|Ly\|_2 + \|y\|_2) \quad (34)$$

для всех $y \in D(L)$, $c > 0$ не зависит от $y \in D(L)$.

В [46] для L были получены некоторые критерии разделимости, зависящие от поведения q и производных. В этих работах также был показан пример неразделимого оператора L с негладким потенциалом q . Без условия дифференцируемости на функцию q достаточные условия разделимости L были получены в [48, 49]. В [4, с. 213-238; 50] был разработан так называемый принцип локализации доказательства разделимости высших биномиальных эллиптических операторов в гильбертовом пространстве. В [15, с. 1062-1063] показано, что локальной интегрируемости и полуограниченности снизу функции q достаточно для разделимости L в $L_1(-\infty, +\infty)$. В этих работах использовались метод оценки функций Грина, метод параметрикса, а также метод локальных оценок резольвент некоторых регулярных операторов [48], [4, с. 213-238; 48, с. 349-358].

Из (34) следует, что $D(L) \subset W_{2,q}^2$, где $W_{2,q}^2$ есть пополнение класса $C_0^\infty(I)$ по норме

$$\|f; W_{2,q}^2\| = \|f''\|_{L_2(I)} + \|qf\|_{L_2(I)}.$$

Одна из теорем о разделимости оператора L на всей оси $\mathbb{R}$ была получена в [51] в терминах сравнения «бегущей средней» Отелбаева $q^*(x)$ от функции q с нормой $\|q\|_{L_2(\tilde{\Delta}(x))}$ на симметричных характеристических отрезках $\tilde{\Delta}(x) = [x - cq^*(x)/2, x + cq^*(x)/2]$, где c -достаточно малая постоянная, величина которой обусловлена специальными требованиями. Нами получена теорема о разделимости оператора L на полуоси $I = [a, +\infty)$ в других терминах, существенно раздвигающих класс потенциалов $q(\cdot)$ в (33), при которых оператор L разделим.

Возьмем одну из «бегущих средних» Отелбаева для веса q равенством:

$$q^*(x) = \sup \left\{ h > 0; h \int_x^{x+h} q dt \leq 1 \right\}.$$

Функция q^* - конечная, положительная и непрерывная справа на $\bar{I}$ и такая, что на каждом отрезке $\Delta^*(x) = [x, x + q^*(x)]$

$$q^*(x) \int_{\Delta^*(x)} q(t) dt = 1$$

Пусть C_0 - наилучшая постоянная в неравенстве вложения Соболева

$$\max_{0 \leq t \leq 1} |y(t)| \leq C_0 \left[\int_0^1 (|y''|^2 + |y|^2) dt \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 3.2 Пусть $q \geq 1, q \in L_2(\bar{I}, \text{loc})$ и удовлетворяет условиям:

1. Существует такая регулярная функция длины $h(\cdot)$ на $\bar{I}$, что для всех $x \geq a$:

$$q^*(x) < A_0^{-1} h(x)$$

$$A_0 = 4\pi b^3 \left(C_0 \sqrt{2(1+b^2)} + 2C_0^2 \pi b^2 \sqrt{(1+b^4)} \right), \quad (35)$$

2.

$$\sup_{\Delta(x)} q^*(t) \left(\sup_{t \in \Delta(x)} q^*(t) \int_{\Delta^*(t)} q^2 \right)^{\frac{1}{2}} = C_q < \infty. \quad (36)$$

Тогда оператор L в (33) разделим.

Далее ниже: $W_2^m = W_2^m(I), L_2 = L_2(I)$.

Теорема 3.3 Пусть выполнены условия теоремы 3.2. Если $z \in W_{2,q}^2 \cap M(W_2^{m-2} \rightarrow L_2)$, $L(z) \in M(W_2^m \rightarrow L_2)$, то справедливы утверждения:

а) $z \in M(W_2^m \rightarrow W_{2,q}^2)$;

б) справедлива оценка

$$\|z\|_{M(W_2^m \rightarrow W_{2,q}^2)} \leq \tilde{C} \left[\|L(z)\|_{M(W_2^m \rightarrow L_2)} + \|z\|_{M(W_2^{m-2} \rightarrow L_2)} + \|z\|_{W_{2,q}^2} \right].$$

Постоянная $\tilde{C}$ зависит только от числовых параметров.

Замечание Из теоремы 3.3 следует, что каждое решение z уравнения

$$-z'' + q(x)z = f, \quad f \in M(W_2^m \rightarrow L_2)$$

из класса $W_{2,q}^2 \cap M(W_2^{m-2} \rightarrow L_2)$ является мультипликатором из W_2^m в $W_{2,q}^2$.

Пример 6 Пусть $q^2(x) = (1+x)^{2k} \sin^4 x^2 + 1, k \geq 1$ - целое; $I = (a, +\infty), a \geq 8$. Оператор L с потенциалом $q(x) = \sqrt{1 + (1+x)^{2k} \sin^4 x^2}$ на I разделим и для него справедливы выводы теоремы 3.3.

Автор выражает благодарность за ценные рекомендации профессорам М. Lanza, К.А. Бекмагамбетову, Е.Д. Нурсултанову, К.Н. Оспанову.

1 ОБ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЗАМКНУТОГО РАСШИРЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СИНГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ОСИ

В разделе 1 исследуется несамосопряженный оператор

$$L_0 f = -a_2(x)f'' + a_1(x)f' + a_0(x)f,$$

заданный в классе $C_0^\infty(I)$ бесконечно дифференцируемых и финитных в $I = [0, \infty)$ функций. Коэффициенты $a_j \in L_{2, \text{loc}}(I)$ ($j = 0, 1, 2$), $a_2 > 0$ п.в. в I , $a_2^{-1} = 1/a_2 \in L_2(I)$. В п. 1.1 раздела даны необходимые определения и утверждения. В п. 1.2 раздела были получены условия, при которых оператор L_0 допускает замкнутое инъективное расширение L с областью определения $D(L) \subset W = W_2^2(a_2^2, a_0^2)$, где W есть весовое пространство Соболева, определяемое как пополнение класса $C_0^\infty(I)$ по норме

$$\|y\|_W = \left(\int_0^\infty (|a_2(x)y''|^2 + |a_0(x)y|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Метод исследований представляет собой естественное развитие метода «бегущих средних» М. Отелбаева, примененного в работе [14, с. 165-189], где исследовался самосопряженный оператор высокого порядка с неотрицательными гладкими коэффициентами.

В п. 1.3 рассмотрена задача о наилучшей линейной аппроксимации решений уравнения:

$$Ly = f, \quad f \in BL_2(I)$$

в случае, когда оператор L имеет (необязательно ограниченный) обратный оператор и удовлетворяет квазикоэрцитивному условию:

$$\|y\|_W \leq c(\|Ly\|_2 + \|y\|_X), \quad y \in D(L).$$

1.1 Классы дифференцируемых функций в областях на прямой. Неравенства вложений

Класс $AC[a, b]$

Определение [52] Функция f , определенная на $[a, b]$, называется абсолютно непрерывной на $[a, b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что, какова бы ни была конечная система попарно непересекающихся интервалов (a_k, b_k) , $k = 1, 2, \dots, n$ с суммой длин, меньшей δ , $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$, выполнено неравенство $\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$.

Множество абсолютно непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций обозначим $AC[a, b]$. Из определения следует, что $AC[a, b] \subset C[a, b]$

Теорема [52, с. 344] Функция $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, представляющая собой неопределенный интеграл суммируемой функции, абсолютно непрерывна.

Теорема [52, с. 345] Производная $f = F'$ абсолютно непрерывной функции, заданной на отрезке $[a, b]$, суммируема на этом отрезке и для каждого x ($a \leq x \leq b$) $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$.

Эти теоремы показывают, что абсолютно непрерывные функции восстанавливаются с точностью до постоянного слагаемого по своей производной с помощью операции интегрирования.

Теорема [51, с. 14] Если $f, g \in AC[a, b]$, то справедлива формула интегрирования по частям $\int_a^b f(t)g'(t)dt = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(t)g(t)dt$.

Теорема [53] Пусть на ограниченном $\Omega \in \mathbb{R}$ задано семейство интервалов $\Delta_x = (x - a_x, x + a_x)$, где $0 < a_x < \infty$. Тогда из семейства $\Delta_x, x \in \Omega$ можно извлечь не более чем счетное подсемейство $\Delta_j, j \in \Lambda$, где $\Delta_j = \Delta_{x_j}$, что: 1) $\Omega \subset \bigcup_{j \in \Lambda} \Delta_j$; 2) $\{\Delta_j, j \in \Lambda\}$ можно разбить на l ($1 \leq l \leq 5$) подмножеств $\{\Delta_j, j \in \Lambda_i\}$, в каждом из которых интервалы попарно не пересекаются.

Операторы в нормированных пространствах

Пусть X, Y - пространства с нормой, A_0 - оператор, действующий из X в Y . Обозначим через $D(A_0)$ область определения, $\text{Im} A_0$ образ оператора A_0 .

Определение [52, с. 229] Оператор A_0 называется замкнутым, если из условий $x_n \in D(A_0), x_n \rightarrow x, A_0 x_n \rightarrow y$ следует, что $x \in D(A_0)$ и $y = A_0 x$.

Пусть $G(A_0) = \{(x, A_0 x), x \in D(A_0)\}$.

Определение [52, с. 229] Если замыкание $\overline{G(A_0)}$ множества $G(A_0)$ в $X \times X$ есть также график некоторого оператора, то этот оператор называется замыканием оператора A_0 и обозначается A . A есть минимальное замкнутое расширение оператора A_0 .

Т.к. множество $\overline{G(A_0)}$ состоит из элементов вида $(x, A_0 x), x \in D(A_0)$, и их пределов, то имеет место

Утверждение [38, с. 5-520] Оператор допускает замыкание тогда и только тогда, когда из соотношений $x_n, x'_n \in D(A_0), x_n \rightarrow x, x'_n \rightarrow x, A_0 x_n \rightarrow y, A_0 x'_n \rightarrow y'$ следует, что $y = y'$. В этом случае область определения $D(A)$ замыкания состоит из тех и только тех x , для которых существует последовательность $x_n \in D(A_0)$, удовлетворяющая условиям: $x_n \rightarrow x, A_0 x_n$ сходится. При этом $Ax = \lim_{n \rightarrow \infty} A_0 x_n$.

Утверждение [38, с. 4-520] Всякий линейный ограниченный оператор, определенный на всем пространстве X , замкнут.

Определение [52, с. 225] Оператор A_0 называется обратимым, если для любого $y \in \text{Im} A_0$ уравнение $A_0 x = y$ имеет единственное решение.

Если A_0 обратим, то каждому $y \in \text{Im} A_0$ можно поставить в соответствие единственный элемент $x \in D(A_0)$, являющийся решением уравнения $A_0 x = y$.

Оператор, осуществляющий это соответствие, называется обратным к A_0 и обозначается A_0^{-1} .

Утверждение [38, с. 4-520] Если оператор A_0 замкнут и оператор A_0^{-1} существует, то A_0^{-1} тоже замкнут. Если оператор A_0 не замкнут, то по определению его график $G(A_0)$ также не замкнут в $X \times X$.

Теорема [52, с. 225] (теорема Банаха об обратном операторе) Пусть A линейный ограниченный оператор, взаимно однозначно отображающий банахово пространство E в банахово пространство E_1 . Тогда обратный оператор A^{-1} ограничен.

Теорема [52, с. 230] Пусть E - банахово пространство, I - тождественный оператор в E , а A - такой ограниченный линейный оператор, отображающий E в себя, что $\|A\| < 1$. Тогда оператор $(I - A)^{-1}$ существует и представляется в виде $(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$.

Классы $L_p(\Omega), W_p^k(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}$. Неравенства вложений

Определение [52, с. 139] Пусть B_1, B_2 - банаховы пространства. B_1 вложено в B_2 ($B_1 \hookrightarrow B_2$), если 1) B_1 содержится в B_2 как линейное подмножество; 2) существует постоянная $c > 0$ такая, что $\|x\|_{(B_2)} \leq c\|x\|_{(B_1)}, x \in B_1$. Наименьшая постоянная c , при которой выполняется последнее условие называется константой вложения и является нормой оператора вложения $E: B_1 \rightarrow B_2, Ex = x$.

Определение [52, с. 385] Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}$. Пространство определенных в Ω измеримых (по Лебегу) функций с конечной нормой

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, 1 \leq p < \infty \quad (1.1.1)$$

называется пространством $L_p(\Omega)$. (Считаем $f = 0$, если $f = 0$ для почти всех $t \in \Omega$.)

Теорема [51, с. 7] Пространства $L_p(\Omega), 1 \leq p \leq \infty$, полны.

Теорема [51, с. 10] При $1 \leq p < \infty$ множество $C^\infty(\Omega)$ плотно в $L_p(\Omega)$.

Определение [51, с. 12] Пусть $1 \leq p < \infty, k$ - натуральное. Пространством Соболева $W_p^k(\Omega)$ называется множество всех функций $f \in L_p(\Omega)$, у которых почти всюду в Ω существует производная $f^{(k)}$ и она принадлежит $L_p(\Omega)$. За норму в $W_p^k(\Omega)$ принимается функционал:

$$\|f\|_{W_p^k(\Omega)} = \|f^{(k)}\|_{L_p(\Omega)} + \|f\|_{L_p(\Omega)}. \quad (1.1.2)$$

Очевидно, $W_p^k(\Omega)$ содержится в $L_p(\Omega)$.

Теорема [51, с. 12] При $1 \leq p \leq \infty$ пространства $W_p^k(\Omega)$ полны.

Следующая теорема показывает, что вопрос о выяснении гладкости функции из $W_p^k(a, b)$ в других терминах, в частности классических, является очень важным в теории пространств Соболева. Наугад взятая функция может

оказаться непрерывной, но из определения не ясно будут ли все функции непрерывны, всегда ли произвольная функция из $W_p^k(a, b)$ принадлежит пространству $W_p^m(a, b)$ при $m < k$.

Теорема [51, с. 14] Пространство $W_p^k(a, b)$, $(1 \leq p \leq \infty)$, совпадает с множеством $\{f: f, f', \dots, f^{(k-1)} \in AC[a, b], f^{(k)} \in L_p(a, b)\}$.

Теорема [51, с. 15] Пространство $C^\infty(a, b)$ плотно в $W_p^k(a, b)$, $(1 \leq p < \infty)$.

На классах $W_p^n(-1/2; 1/2)$ $(0 \leq p \leq q < \infty)$ справедливы оценки:

$$\max_{[-1/2; 1/2]} |f^{(k)}(t)| \leq A_p(n, k) \left(\int_{-1/2}^{1/2} (|f^{(n)}(t)|^p + |f(t)|^p) dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.1.3)$$

$$\left(\int_{-1/2}^{1/2} |f^{(k)}(t)|^q dt \right)^{1/q} \leq A_{p,q}(n, k) \left(\int_{-1/2}^{1/2} (|f^{(n)}(t)|^p + |f(t)|^p) dt \right)^{1/p} \quad (1.1.4)$$

где $A_p, A_{p,q}$ наилучшие постоянные. См. [54]. Замена переменных $t = x + h\xi$, $\xi \in [-1/2, 1/2]$ в (1.1.3), (1.1.4) приводит к оценкам на отрезке $\Omega = [x - h/2, x + h/2]$:

$$\max_{\Omega} |f^{(k)}(t)| \leq A_p(n, k) h^{n-k-\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} (|f^{(n)}(t)|^p + h^{-np} |f(t)|^p) dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (1.1.5)$$

$$\left(\int_{\Omega} |f^{(k)}(t)|^q dt \right)^{1/q} \leq A_{p,q}(n, k) h^{n-k-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \left(\int_{\Omega} (|f^{(n)}(t)|^p + h^{-np} |f(t)|^p) dt \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.1.6)$$

Неравенство Макенхаупта [55] Пусть $s(\cdot) > 0, u(\cdot) > 0$ функции из $L_{2,loc}(I)$ и пусть

$$A(s, u) = \sup_{x>0} \left[\int_0^x u^2 dt \int_x^\infty s^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Тогда

$$\left[\int_0^\infty \left| s(x) \int_0^x u(t) f(t) dt \right|^2 dx \right]^{1/2} \leq 2A(s, u) \left[\int_0^\infty |f|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}, \quad f \in L_2(I).$$

Определение Пусть $\omega(x) > 0$ для почти всех $x \in \Omega$ и $\omega(x) \in L_p^{loc}(\Omega)$. Функцию ω называют весом на Ω .

Определение [51, с. 229] Пусть $n \geq 1$ - целое, $1 \leq p < \infty, 0 \leq \omega, \omega_0, \omega_1 \in L_p^{loc}(\Omega)$. Введем на $C_0^\infty(\Omega), \Omega = (a, b), -\infty \leq a < b \leq \infty$, нормы

$$\|f\|_{L_{p,\omega}} = \left(\int_{\Omega} |f(t)|^p \omega(t) dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (1.1.7)$$

$$\|f; W_{p,\omega_0,\omega_1}^n\| = \left(\int_{\Omega} (|f^{(n)}(t)|^p \omega_1(t) + |f(t)|^p \omega_0(t)) dt \right)^{1/p}. \quad (1.1.8)$$

Пространство всех измеримых на Ω функций f таких, что $\|f\|_{L_{p,\omega}} < \infty$ называют весовым пространством Лебега. Пространство всех измеримых на Ω функций f таких, что $\|f; W_{p,\omega_0,\omega_1}^n\| < \infty$ называют весовым пространством Соболева. ($f = 0$, если $f = 0$ почти всюду по мере $d\omega(x) = \omega(x)dx$).

$W_{p,\omega_0,\omega_1}^n(\Omega)$ является пополнением $C_0^\infty(\Omega)$ по норме (1.1.8), $L_{(p,\omega)}(\Omega)$ - пополнение $C_0^\infty(\Omega)$ по норме (1.1.7). В частности, $W_{p,v}^n(\Omega) = W_{p,\omega_0,\omega_1}^n(\Omega)$, где $\omega_1 \equiv 1, \omega_0 = v, W_{p,v}^n(\Omega) = W_{p,\omega_0,\omega_1}^n(\Omega)$, где $\omega_0 = \omega_1 \equiv 1$.

Неравенства вложений на «характеристических» промежутках

Пусть $h > 0$ и $0 < v \in L_{loc}(\mathbb{R})$. Определим в $\mathbb{R}$ функцию см. [13, с. 4-188].

$$v^*(x) = \sup_{h>0} \left\{ h: h^{2n-1} \int_{x-\frac{h}{2}}^{x+\frac{h}{2}} v(t) dt \leq 1 \right\} \quad (1.1.9)$$

Утверждение [13, с. 4-188] Если $0 < h = v^*(x) < \infty$, то а)

$$h^{2n-1} \int_{x-\frac{h}{2}}^{x+\frac{h}{2}} v(t) dt = 1.$$

б) функция $v^*(x)$ медленно колеблется на отрезках $\frac{1}{2}\Delta^*(x)$, где $\Delta^*(x) = [x - v^*(x)/2; x + v^*(x)/2]$, а именно

$$4^{-1}v^*(x) \leq v^*(t) \leq 4v^*(x) \text{ если } t \in \frac{1}{2}\Delta^*(x). \quad (1.1.10)$$

Для $n \geq 1$ - целого, $x \in \mathbb{R}, h > 0$ пусть $\mathfrak{R}_{x,h}$ - пространство полиномов степени $\leq n - 1$, для которых $\int_{x-h/2}^{x+h/2} |R(t)|^2 dt = 1$. Для $0 < v \in L_{p,loc}$ положим

$$v^\#(x) = \sup \left\{ h > 0: h^{2n-1} \inf_{R \in \mathfrak{R}_{x,h}} \int_{x-\frac{h}{2}}^{x+\frac{h}{2}} |R(t)|^2 v(t) dt \leq 1 \right\} \quad (1.1.11)$$

т.к. $R(t) = h^{-1/2} \in \mathfrak{R}_{x,h}$, то

$$h^{2n} \inf_{R \in \mathcal{R}_{x,h}} \int_{x-\frac{h}{2}}^{x+\frac{h}{2}} |R(t)|^2 v(t) dt \leq h^{2n-1} \int_{x-\frac{h}{2}}^{x+\frac{h}{2}} v(t) dt \quad (1.1.12)$$

откуда следует, что

$$H_x^* = \left\{ h > 0: h^{2n-1} \int_{x-\frac{h}{2}}^{x+\frac{h}{2}} |v(t)|^2 dt \leq 1 \right\} \subset \left\{ h > 0: h^{2n} \inf_{R \in \mathcal{R}_{x,h}} \int_{x-\frac{h}{2}}^{x+\frac{h}{2}} |R(t)|^2 v(t) dt \leq 1 \right\} = H_x^\#,$$

$$v^*(x) = \sup H_x^* \leq \sup H_x^\# = v^\#(x). \quad (1.1.13)$$

Заметим, что $h^{2n-1} \int_{x-h/2}^{x+h/2} |v(t)| dt \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Поэтому $H_x^* \supset (0, \varepsilon)$ и $v^*(x) > 0$.

Лемма [13, с. 4-188] Пусть $0 < h = v^*(\cdot) < \infty$ и $\exists s \in (0,1)$ такое, что

$$\inf_{R \in \mathcal{R}_{x,h}} \int_{x-\frac{h}{2}}^{x+\frac{h}{2}} |R(t)|^2 v(t) dt \leq s h^{-1} \int_{x-\frac{h}{2}}^{x+\frac{h}{2}} v(t) dt.$$

Тогда существует независимая от $v(\cdot)$ постоянная $c^* > 1$ такая, что для всех $y \in C^n(\Omega)$, $\Omega = [x - h/2, x + h/2]$, справедлива оценка:

$$h^{-np} \int_{x-\frac{h}{2}}^{x+\frac{h}{2}} |y(t)|^p dt \leq c^* \int_{x-\frac{h}{2}}^{x+\frac{h}{2}} (|y^{(n)}(t)|^p + |y(t)|^p) dt. \quad (1.1.14)$$

1.2 Условия существования замкнутого обратимого расширения оператора L_0

В данном подразделе рассматривается несамосопряженный оператор

$$L_0 f = -a_2(x) f'' + a_1(x) f' + a_0(x) f, \quad (1.2.1)$$

заданный в классе $C_0^\infty(I)$ бесконечно дифференцируемых и финитных в $I = [0, \infty)$ функций. Коэффициенты $a_j \in L_{2,\text{loc}}(I)$ ($j = 0,1,2$), $a_2 > 0$ п.в. в I , $a_2^{-1} = 1/a_2 \in L_2(I)$. Коэффициенты a_j ($j = 0,1$) могут менять знак и невырождены в любой окрестности $+\infty$ (мера Лебега множества $a_{j,(t)} = \{x \geq t: |a_j(x)| > 0\}$ положительна). Не ставится условие $\inf_{x \geq t} a_j(x) \geq c_t, j = 0,1, c_t \in \mathbb{R}$.

Нас будут интересовать условия на переменные коэффициенты $a_j(\cdot)$, при которых оператор L_0 в (1.2.1) допускает замыкание. Здесь мы начинаем с описания и развития метода исследования, выявляющего как внутренние локальные связи коэффициентов $a_j(\cdot)$, которые определяют те или иные важные свойства рассматриваемого оператора L_0 .

Обозначим через $L_{loc}^+(\Omega)$ (Ω - промежуток в $\mathbb{R}$) класс невырожденных локально суммируемых в Ω функций $f \geq 0$ (весовых функций). Пусть $\mathfrak{R}_{x,h}$ совокупность всех аффинных функций $R(t) = c_0 + c_1 t$ ($c_0, c_1 \in \mathbb{R}$), для которых

$$\int_x^{x+h} |R|^2 dt = 1 \quad (x \geq 0, h > 0).$$

Далее, пусть $\rho, v \in L_{loc}^+(I)$, $\rho(\cdot) > 0$ в I , $\rho^{-1} = 1/\rho \in L_1(I)$. Положим

$$S^\#(x, h; v) = \inf_{R \in \mathfrak{R}_{x,h}} \int_x^{x+h} v(t) |R|^2 dt,$$

$$M^\#(x, h; \rho, v) = h^{\frac{3}{2}} \left(\int_x^{x+h} \rho^{-1} dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(S^\#(x, h; v) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Всякую функцию $h(x) > 0, x \geq 0$ будем называть функцией длины (ф.д.) в $I = [0, \infty)$.

Будем говорить что, весовая пара (ρ, v) допустима относительно ф.д. $h(\cdot)$, если

$$M^\#(x, h(x); \rho, v) \geq 1, \forall x \geq 0. \quad (1.2.2)$$

Базовым условием для применения метода «бегущих средних» $v^*(\cdot)$ в работах М.Отелбаева являлось условие положительности и конечности $v^*(\cdot)$. Здесь мы вводим следующую «бегущую среднюю», построенную для несамосопряженных операторов второго порядка на полуоси.

Положим

$$h^\#(x) = h^\#(x; \rho, v) = \sup\{h > 0: M^\#(x, h; \rho, v) \leq 1\}.$$

Из того, что $R(t) \equiv h^{-1/2} \in \mathfrak{R}_{x,h}$ и $S^\#(x, h; v) \leq h^{-1} \int_x^{x+h} v dt$, следует

$$M^\#(x, h(x); \rho, v) \leq h^2 \int_x^{x+h} \rho^{-1} dt \cdot \int_x^{x+h} v(t) dt, \quad (1.2.3)$$

в силу которой

$$M^\#(x, h(x); \rho, v) \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0+.$$

Следовательно $h^\#(x) > 0$.

Утверждение 1.1 Если $h = h^\#(x; \rho, v) < \infty$, то $M^\#(x, h; \rho, v) = 1$.

Из утверждения 1.1 следует, что пара (ρ, v) допустима относительно ф.д. $h(\cdot) = h^\#(\cdot, \rho, v) < \infty$.

Доказательство. Допустим, что $M^\#(x, h^\#; \rho, v) > 1$ и, следовательно

$$[M^\#(x, h^\#; \rho, v)]^2 > (1 + \delta)^2 \quad (1.2.4)$$

для некоторого $\delta > 0$. Возьмем $\gamma \in (0, 1)$ такое, что

$$\gamma h^{\#3} \int_x^{x+h^\#} \rho^{-1} dt < \delta. \quad (1.2.5)$$

Так как

$$\varphi(h) = h^3 \int_x^{x+h} \rho^{-1} dt \rightarrow \varphi(h^\#) \text{ при } h \rightarrow h^\# - 0$$

то найдется $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ такое, что

$$\varphi(h^\#) < (1 + \delta)\varphi(h), \text{ если } h^\# - \varepsilon_0 < h < h^\#. \quad (1.2.6)$$

Будем полагать, что $\mathfrak{R}_{x,h}$ есть пространство сужений $R(t) = c_0 + c_1 t$ на отрезке $[x, x + h]$.

Покажем, что функция

$$\psi(h, R) = \int_x^{x+h} |R|^2 v dt$$

равномерно непрерывна на компакте $[0, h^\#] \times \mathfrak{R}_{x,h^\#}$. Достаточно доказать непрерывность $\psi(h, R)$. Так как $\mathfrak{R}_{x,h}$ есть пространство размерности 2, то (все нормы в $\mathfrak{R}_{x,h^\#}$ эквивалентны) существует $c > 0$ такое, что

$$\|R\|_{C(\Delta^\#)} = \max_{t \in \Delta^\#} |R(t)| \leq c \|R\|_{L_2(\Delta^\#)} = c, R \in \mathfrak{R}_{x,h^\#} \quad (1.2.7)$$

где $\Delta^\# = [x, x + h^\#]$. Если $\|R_1 - R_2\|_{L_2(\Delta^\#)} < \varepsilon_1$, $h^\# - \varepsilon < h \leq h^\#$, $R_1, R_2 \in \mathfrak{R}_{x,h^\#}$, то в силу (1.2.7)

$$\begin{aligned} ||R_1(t)|^2 - |R_2(t)|^2| &= |R_1(t) + R_2(t)||R_1(t) - R_2(t)| \leq \\ &\leq (\|R_1\|_{C(\Delta^\#)} + \|R_2\|_{C(\Delta^\#)}) \|R_1 - R_2\|_{L_2(\Delta^\#)} \leq 2c\varepsilon_1 \end{aligned}$$

и далее

$$\begin{aligned} |\psi(h + \varepsilon, R_1) - \psi(h, R_2)| &\leq \int_x^{x+h} |R_1^2 - R_2^2| v dt + \int_{x+h}^{x+h+\varepsilon} |R_1|^2 v dt \leq \\ &\leq 2c\varepsilon_1 \int_{\Delta^\#} v dt + c \int_{x+h}^{x+h+\varepsilon} v dt \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

В оценке (1.2.8) ε_1 и ε не зависят друг от друга. Поэтому мы можем считать, что ε_1 и ε достаточно малы, чтобы

$$2c\varepsilon_1\|v\|_{L_1(\Delta^\#)} + \|vR_1\|_{L_1(x+h, x+h+\varepsilon)} < \gamma.$$

Для каждого $R(t) = c_0 + c_1 t \in \mathfrak{R}_{x,h}$, $h^\# - \varepsilon_0 < h < h^\#$, $h^\# - h \leq \varepsilon$, полином

$$R^\#(t) = \frac{c_0 + c_1(t)}{\|R; L_2(\Delta^\#)\|} \in \mathfrak{R}_{x,h^\#},$$

и, если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то

$$\begin{aligned} S^\#(x, h^\#; v) &\leq \psi(h^\#; R^\#) \leq |\psi(h^\#, R^\#) - \psi(h, R^\#)| + \psi(h, R^\#) < \\ &< \gamma + \int_x^{x+h} |R|^2 v dt \left(\int_x^{x+h} |R|^2 dt + \int_{x+h}^{x+h^\#} |c_0 + c_1(t)|^2 dt \right)^{-1} \leq \\ &\leq \gamma + \int_x^{x+h} |R|^2 v dt \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

Следовательно, при достаточно малых ε ($0 < \varepsilon < \varepsilon_0$)

$$S^\#(x, h^\#; v) \leq \gamma + S^\#(x, h; v), h^\# - \varepsilon < h < h^\#. \quad (1.2.10)$$

По свойству супремума найдется h , $h^\# - \varepsilon < h < h^\#$, для которого $M^\#(x, h; \rho, v) \leq 1$. Применяя последовательно оценки (1.2.4), (1.2.10), (1.2.5), (1.2.6) выводим

$$(1 + \delta)^2 < \varphi(h^\#)S^\#(x, h^\#; v) < \delta + (1 + \delta)[M^\#(x, h; \rho, v)]^2 \leq 1 + 2\delta$$

откуда следует $(1 + \delta)^2 < 1 + 2\delta$ ($\delta > 0$), что невозможно.

Итак $M^\#(x, h^\#; \rho, v) \leq 1$. Допустим, что $(M^\#(x, h^\#; \rho, v))^2 < 1 - 2\delta$ при некотором δ , $0 < \delta < 1/2$. Так как $M^\#(x, h; \rho, v) > 1$, если $h > h^\#$, то можно взять $h = h^\# + \varepsilon$, с таким малым $\varepsilon > 0$, что имеют место оценки вида (1.2.6) и (1.2.10), где h и $h^\#$ поменены местами. При этом оставляя оценку (1.2.5). Выводим:

$$1 < [M^\#(x, h; \rho, v)]^2 = \varphi(h)S^\#(x, h; v) < (1 + \delta)\varphi(h^\#) \left(\gamma + S^\#(x, h^\#; v) \right) < \\ < (1 + \delta)([M^\#(x, h^\#; \rho, v)]^2 + \delta) < 1 - \delta^2,$$

что невозможно. Остается одно: $M^\#(x, h^\#; \rho, v) = 1$. Утверждение доказано.

Приведем здесь один класс весов $v(\cdot)$, для которых

$$0 < h^\# = h^\#(x; \rho, v) < \infty, \quad (x \geq 0). \quad (1.2.11)$$

Будем говорить, что вес $v \in L_{loc}^+(I)$ удовлетворяет условию регулярности $(\mathfrak{R})$ относительно ф.д. $h(\cdot)$, если существует такое $\eta, 0 < \eta < 1$, что

$$\eta h(x)^{-1} \int_x^{x+h(x)} v dt \leq S^\#(x, h(x), v). \quad (1.2.12)$$

Пусть вес $v(\cdot)$ в I удовлетворяет условию регулярности (1.2.12). Тогда

$$M^\#(x, h(x); \rho, v) \geq h \left(\eta \int_x^{x+h} \rho^{-1} dt \cdot \int_x^{x+h(x)} v dt \right) \rightarrow \infty \text{ (при } h \rightarrow \infty),$$

откуда следует (1.2.12).

Утверждение 1.2 [16, с. 3-32] Для любого $\delta \in (0, 1)$ существует независимое от $x \geq 0, h > 0$ число $\gamma = \gamma(\delta) > 0$ такое, что для всех $R \in \mathfrak{R}_{x,h}$ мера

$$|\{t \in [x, x+h]: |R(t)| \leq \gamma h^{-1/2}\}| \leq \delta h.$$

Пример 1 Функция $v(x) = (1+x)^{2m}$ ($m \in \mathbb{N}$) удовлетворяет условию регулярности $(\mathfrak{R})$ относительно любой функции длины $h(\cdot)$ в I с $\eta = \frac{\gamma^2}{2}$.

Доказательство. Для $R(t) = c_0 + c_1 t$ множество

$$E = \{t \in [x, x+h]: |R(t)| \leq \gamma h^{-1/2}\}$$

либо пусто, либо есть отрезок $[\alpha, \beta] \subset [x, x+h] = \Delta$. Из утверждения 1.2 следует, что $\beta - \alpha \leq \delta h$. Имеем:

$$\frac{\int_E v dt}{\int_\Delta v dt} \leq \frac{(1+\beta)^{2m+1} - (1+\alpha)^{2m+1}}{(1+x+h)^{2m+1} - (1+x)^{2m+1}} = \frac{\delta \sum_{k=1}^{2m+1} (1+\beta)^{2m+1-k} (1+\alpha)^{k-1}}{\sum_{k=1}^{2m+1} (1+x+h)^{2m+1-k} (1+x)^{k-1}}.$$

Функция $\varphi_k(t) = (1+t+\delta h)^{2m+1-k} (1+t)^{k-1}$, $x \leq t \leq x + (1-\delta)h$, имеет положительную производную. Поэтому

$$\frac{\int_E v dt}{\int_\Delta v dt} \leq \delta \sum_{k=1}^{2m+1} \frac{(1+x+h)^{2m+1-k} (1+x+(1-\delta)h)^{k-1}}{(1+x+h)^{2m+1-k} (1+x+h)^{k-1}} < \delta(2m+1) = \frac{1}{2},$$

если $\delta = \frac{1}{2(2m+1)}$, откуда следует

$$\int_x^{x+h} v(t)|R|^2 dt \geq \frac{\gamma^2}{h} \left(\int_\Delta v dt - \frac{1}{2} \int_E v dt \right) = \frac{\eta}{h} \int_x^{x+h} v dt$$

где $\eta = \eta(m) = \frac{\gamma(\delta)^2}{2}$. Доказательство завершено.

Определение. Будем говорить, что вес $v(\cdot)$ в I удовлетворяет слабому условию Макенхаупта (M_w) относительно базиса промежутков

$$B_{h(\cdot)} = \bigcup_{x \geq 0} \{\Delta = (a, b) \subset [x, x + h(x))\},$$

если существуют такие $0 < \delta, \tau < 1$, что

$$\int_e v \leq \tau \int_\Delta v \text{ как только } e \subset \Delta \in B_{h(\cdot)} \text{ и } |e| \leq \delta |\Delta|. \quad (1.2.13)$$

Запись $v \in M_w$ относительно ф.д. $h(\cdot)$.

Из утверждения 1.2 следует, что всякий вес $v \in M_w$ удовлетворяет условию ($\mathfrak{R}$) относительно ф.д. $h(\cdot)$, а именно, в силу (1.2.13):

$$R \in \mathfrak{R}_{x,h}, \quad h = h(x), \quad e_\gamma = \{t \in \Delta = [x, x + h]: |R(t)| \leq \gamma h^{-1/2}\} \Rightarrow$$

$$\int_\Delta v(t)|R|^2 dt \geq \gamma^2 h^{-1} \int_{\Delta \setminus e_\gamma} v \geq \gamma^2 (1 - \tau) \int_\Delta v,$$

откуда следует (1.2.12).

Функции $v(x) = |x|^\alpha$, $-1 < \alpha < \frac{1}{p-1}$, $p > 1$, удовлетворяют условию M_w относительно любой ф.д. $h(\cdot)$ (см. [34]).

Замечание. Если пара (ρ, v) допустима относительно функции длины $h(\cdot)$, то имеет место оценка

$$h^\#(x; \rho, v) \leq h(x),$$

следующая непосредственно из неравенства (1.2.2).

Положим, на промежутках $\Delta \subset \mathbb{R}^+$

$$\|f\|_{w_p^l(\Delta; \rho, v)} = \|\rho^{1/p} f^{(l)}\|_{L_p(\Delta)} + \|v^{1/p} f\|_{L_p(\Delta)}, \quad l \in \mathbb{N}, 1 \leq p < \infty.$$

Обозначим через $W_p(\rho, v)$ пополнение класса $C_0^\infty(I)$ по норме $\|f\|_{W_p^l(I; \rho, v)}$. При записи оценок $c, c_0, c_1, c_2 \dots$ будут обозначать положительные постоянные, значения которых зависят только от числовых параметров. Для переменных величин $A > 0, B > 0$ запись $A \ll B$ означает, что $A \leq cB$.

Утверждение 1.3 Пусть Ω - конечный интервал, и пусть $k, m \in \mathbb{N}$ и p связаны условиями: $p(m-k) > 1$ при $p > 1$ либо $m-k \geq 1$ при $p = 1$. Тогда $f \in W_p^m(\Omega)$ имеет в $\Delta = [x, x+h] \subset \Omega$ непрерывную производную $f^{(k)}$ и

$$\max_{\Delta} |f^{(k)}| < c_k h^{m-k-1/p} \left(\|f^{(m)}\|_{L_p(\Delta)} + h^{-m} \|f\|_{L_p(\Delta)} \right). \quad (1.2.14)$$

Здесь $W_p^m(\Omega)$ - пространство Соболева с нормой $\|f; W_p^m(\Omega)\| = \|f^{(m)}\|_{L_p(\Omega)} + \|f\|_{L_p(\Omega)}$. Утверждение 1.3 следует из оценки (1.1.15).

Лемма 1.1 (Основное неравенство) Пусть $\Delta = [x, x+h] \subset I$ и выполнены условия:

1. $M^\#(x, h; \rho, v) \geq 1$
2. существует такое $\eta \in (0, 1)$, что

$$S^\#(x, h; v) \geq \eta h^{-1} \int_x^{x+h} v dt. \quad (1.2.15)$$

Тогда для всех $f \in W_2^2(\Omega)$ ($\Delta \subset \Omega \subset I$)

$$\delta \left(h^{-3} \int_{\Delta} |f|^2 dt \right)^{1/2} \leq c \int_{\Delta} |f''| dt + \left[\int_{\Delta} \rho^{-1} dt \int_{\Delta} |f|^2 v(t) dt \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (1.2.16)$$

где $\delta = \frac{\sqrt{\eta}}{2(1+\sqrt{\eta})}$.

Доказательство. Вместо неравенства (1.2.16) достаточно доказать эквивалентное при условии

$$\int_{\Delta} |f|^2 dt = 1, \quad (1.2.17)$$

неравенство

$$\delta h(x)^{-\frac{3}{2}} \leq \int_{\Delta} |f''| dt + B \left[\int_{\Delta} v(t) |f|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (1.2.18)$$

где $B = \|\rho^{-1/2}; L_2(\Delta)\|$. В случае $\|f''; L_1(\Delta)\| \geq \delta h(x)^{-3/2}$ оценка очевидна. Поэтому вместе с условием (1.2.17) полагаем, что

$$\int_{\Delta} |f''| dt < \delta h(x)^{-\frac{3}{2}}. \quad (1.2.19)$$

Таким образом, нам достаточно доказать, что

$$B \left[\int_{\Delta} v(t) |f|^2 dt \right]^{1/2} \geq \delta h(x)^{-\frac{3}{2}}.$$

Из формулы Тейлора

$$\begin{aligned} f(t) &= r(t) + \int_x^t f''(\tau)(t - \tau) d\tau, \\ r(t) &= f(x) + f'(x)(t - x), t > x, \end{aligned}$$

и (1.2.15), (1.2.17), (1.2.19) следуют оценки:

$$\begin{aligned} |f(t) - r(t)| &\leq \int_x^t |f''(\tau)| |t - \tau| d\tau \leq \\ &\leq \int_x^{x+h} |f''(\tau)| |t - \tau| d\tau \leq h \int_{\Delta} |f''| d\tau \leq \delta h(x)^{-\frac{1}{2}}, \quad t \in \Delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|f - r\|_{L_2(\Delta)} &\leq \delta, \\ \|r\|_{L_2(\Delta)} &\geq \|f\|_{L_2(\Delta)} - \|f - r\|_{L_2(\Delta)} \geq 1 - \delta \end{aligned} \quad (1.2.20)$$

$$\begin{aligned} B \|v^{1/2}(f - r)\|_{L_2(\Delta)} &\leq \delta \eta^{-\frac{1}{2}} B[S^{\#}(x, h(x); v)]^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \delta \eta^{-\frac{1}{2}} h(x)^{-\frac{3}{2}} M^{\#}(x, h(x); \rho, v). \end{aligned} \quad (1.2.21)$$

Возьмем $R = \frac{r}{\|r\|_{L_2(\Delta)}}$. Тогда $R \in \mathfrak{R}_{x,h}$ и из (1.2.20) затем (1.2.21) следуют оценки:

$$\begin{aligned} B \|v^{1/2} r\|_{L_2(\Delta)} &\geq B \|r\|_{L_2(\Delta)} \|v^{1/2} R\|_{L_2(\Delta)} \geq \\ &\geq (1 - \delta) h^{-3/2} (h^{3/2} B[S(x, h(x); v)]^{1/2}) = \\ &= (1 - \delta) h^{-\frac{3}{2}} M^{\#}(x, h; \rho, v), \\ B \left[\int_{\Delta} v(t) |f|^2 dt \right]^{1/2} &= B \|v^{1/2} r - v^{1/2}(r - f)\|_{L_2(\Delta)} \geq \\ &\geq h^{-\frac{3}{2}} M^{\#}(x, h(x); \rho, v) \left[(1 - \delta) - \delta \eta^{-\frac{1}{2}} \right] = 2^{-1} h^{-\frac{3}{2}} > \delta h^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

В силу последней оценки неравенство (1.2.18) является справедливым и в случае (1.2.19). Лемма доказана.

Пусть $\Delta(x) = [x, x + h(x)] \subset [0, \infty)$ ($x \geq 0, h > 0$), $w \in L_{\text{loc}}^+(\mathbb{R}^+)$, $i = 0, 1$. Положим

$$\mathcal{K}_i = \mathcal{K}_i(x, h; \rho, w) = h^{1-i} \left(\int_{\Delta(x)} \rho^{-1}(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Delta(x)} w(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Лемма 1.2. Пусть $w \in L_{\text{loc}}^+(\mathbb{R}^+)$. Положим (ρ, v) допустима, вес v удовлетворяет условию (R) (относительно ф. д. $h(x)$) на промежутке $\Delta(x) = [x, x + h(x)]$. Тогда для $f \in W_2^2(\Delta(x))$ справедливы оценки

$$\left(\int_{\Delta(x)} |f^{(i)}|^2 w(t) dt \right)^{1/2} \ll C(\eta) \mathcal{K}_i \left(\int_{\Delta(x)} (\rho(t) |f''|^2 + v(t) |f|^2) dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.2.22)$$

где $i = 0, 1$, $C(\eta) = \frac{\sqrt{\eta}}{2(1+\sqrt{\eta})}$.

Доказательство следует из неравенств (1.2.14) и (1.2.16) для $m = 2, p = 1$:

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\Delta(x)} |f^{(i)}|^2 w(t) dt \right)^{1/2} \ll \\ & \ll h(x)^{1-i} \left[\int_{\Delta(x)} |f''| dt + h(x)^{-2} \left(\int_{\Delta(x)} |f|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Delta(x)} dt \right)^{\frac{1}{2}} \right] \left(\int_{\Delta(x)} w(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \ll \\ & \ll (1 + c(\eta)) h(x)^{1-i} \left(\int_{\Delta(x)} w(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Delta(x)} \rho(t)^{-1} dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Delta(x)} (\rho(t) |f''|^2 + v(t) |f|^2) dt \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Лемма 1.3 [56]. Пусть $1 \leq p, q < \infty$, Ω - интервал в $\mathbb{R}$, $f, f_j \in L_{p, \text{loc}}(\Omega)$ ($j \geq 1$) и пусть:

1. $f_j \rightarrow f$ в $L_{p, \text{loc}}(\Omega)$
2. f_j имеют в Ω обобщенные производные $f_j^{(r)} \in L_{q, \text{loc}}(\Omega)$ и $f_j^{(r)} - f_k^{(r)} \rightarrow 0$, при $j, k \rightarrow \infty$ в $L_{q, \text{loc}}(\Omega)$.

Тогда f имеет в Ω обобщенную производную $f^{(r)} \in L_{q, \text{loc}}(\Omega)$ и $f_j^{(r)} \rightarrow f^{(r)}$ в $L_{q, \text{loc}}(\Omega)$.

Теорема 1.1 Пусть (a_2^2, a_0^2) допустима и a_0^2 удовлетворяет условию (R) относительно ф. д. $h(\cdot)$, $W = W_2^2(a_2^2, a_0^2)$, и пусть:

$$\mathcal{K}(x, h(x); a_2) = \max_{r=0,1} h(x)^{-r+\frac{3}{2}} \left[\int_x^{x+h(x)} a_2^{-2} dt \right]^{\frac{1}{2}} \leq c_1 < \infty \quad (x \geq 0),$$

$$\mathcal{N}(x, h(x); a_2, a_1) = \left[\int_x^{x+h(x)} a_1^2 dt \cdot \int_x^{x+h(x)} a_2^{-2} dt \right]^{1/2} \leq c_2 < \infty \quad (x \geq 0).$$

Тогда:

а) каждая фундаментальная по норме в W последовательность $\{f_k\} \subset C_0^\infty(I)$ имеет в $L_2(I)$ предел $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$;

б) функция f имеет непрерывную в $I = (0, \infty)$ производную $f' = \lim f'_k$ по норме в $L_2(I)$; для почти всех $x \in I$ существует конечная производная $f''(x)$, при этом $f'' = \lim f''_k$ в $L_1(I)$;

в $a_r f^{(r)} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_r f_k^{(r)}$ в $L_2(I)$, $r = 0, 1, 2$;

г) имеет место оценка

$$\|f\|_{L_2(I)} \leq c \sup_{x \geq 0} \mathcal{K}(x, h(x); a_2) \|f\|_W, \quad f \in W.$$

Доказательство. а-б) Пусть $\{f_k\} \subset C_0^\infty(I)$, $\|f_k - f_j\|_W \rightarrow 0$ (при $k, j \rightarrow \infty$). Покажем, что

$$\|a_1(f_k - f_j)'\|_{L_2(I)} \rightarrow 0 \text{ при } k, j \rightarrow \infty. \quad (1.2.23)$$

Пусть $\text{supp}(f_k - f_j) \subset [\xi_{kj}, \infty)$, $\xi_{kj} > 0$. Представим I как дизъюнктное объединение $I = \sqcup_{n \geq 0} \Delta_n$, где $\Delta_n = [x_n, x_{n+1})$, $x_{n+1} = x_n + h(x_n)$, $x_0 = 0$. В силу (1.2.22)

$$\begin{aligned} \|a_1(f_k - f_j)'\|_{L_2(I)}^2 &= \sum_{n \geq 0} \int_{\Delta_n} |a_1(f_k - f_j)'|^2 dx \ll \\ &\ll \left[\sup_{n \geq 0} \mathcal{N}(x_n, h(x_n); a_2^2, a_1^2) \right]^2 \sum_{n \geq 0} \int_{\Delta_n} (|a_2(f_k - f_j)''|^2 + |a_0(f_k - f_j)|^2) dx \ll \\ &\ll c_2^2 \|f_k - f_j\|_W^2, \end{aligned} \quad (1.2.24)$$

откуда следует (1.2.23). Положим по норме в $L_2(I)$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_r f_k^{(r)} = g_r \quad (r = 0, 1, 2) \quad (1.2.25)$$

Покажем, что существуют пределы по норме в $L_2(I)$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k^{(r)} = f_r \quad (r = 0, 1).$$

Аналогично (1.2.24) выводим]

$$\int_0^\infty |f_k^{(r)} - f_j^{(r)}|^2 dx \ll \left[\sup_{n \geq 0} \mathcal{K}_r(x_n, h(x_n); a_2^2) \right]^2 \|f_k - f_j\|_W^2 \ll c_1^2 \|f_k - f_j\|_W^2. \quad (1.2.26)$$

Поэтому, $\{f_k^{(r)}\}$, как фундаментальная в $L_2(I)$ последовательность, сходится в $L_2(I)$ к некоторой функции f_r . Возьмем $f = f_0$. Далее из неравенства (Гельдера)

$$\int_0^\infty |f_k'' - f_j''| dx \leq \|a_2^{-1}\|_{L_2(I)} \|a_2(f_k'' - f_j'')\|_{L_2(I)}$$

следует, что $f_j'' - f_k'' \rightarrow 0$ в $L_1(I)$. Итак

$$f_k \rightarrow f, \quad f_k' \rightarrow f_1 \text{ при } k \rightarrow \infty \text{ в } L_2(I), \quad f_k'' \rightarrow f_2 \text{ в } L_1(I). \quad (1.2.27)$$

с) из леммы 1.3 выводим, что f имеет для почти всех $x \in I$ конечные производные

$$f'(x), f''(x), f' \in L_{2,loc}(I), f'' \in L_{1,loc}(I) \text{ и } f_k' \rightarrow f' \text{ в } L_{2,loc}(I), \quad f_k'' \rightarrow f'' \text{ в } L_{1,loc}(I). \quad (1.2.28)$$

Из (1.2.27), (1.2.28) следует, что $f \in W_1^2(a, b)$, $0 < a < b < \infty$, и справедливы импликации:

$$f'(x) = f_1(x), x \in (a, b) \Rightarrow f' = f_1 \text{ п.в. в } I \Rightarrow f_k' \rightarrow f' \text{ в } L_2(I); \\ f'' = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k'' = f_2 \text{ в } L_1(a, b) \Rightarrow f_k'' \rightarrow f'' \text{ в } L_1(I) \text{ и } g_2 = a_2 f'' \text{ п.в. в } I.$$

Поскольку $f \in W_1^2(a, b)$, $0 < a < b < \infty$, то в силу утверждения 1.3 производная $f' \in C[c, d]$, $a < c < d < b$. Устремляя $c \rightarrow 0+$, $d \rightarrow \infty$, получим что f' непрерывна в $(0, \infty)$.

Осталось доказать с) для $r = 0, 1$. Для коэффициентов $a_r(x)$, $r = 0, 1$ выделим множества $E_r = \{x \in I: |a_r(x)| > 0\}$. В силу (1.2.25) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что

$$\varepsilon \geq \|g_r - a_r f_k^{(r)}\|_{L_2(I)}^2 = \int_{I \setminus E_r} |g_r|^2 dx + \int_{E_r} |g_r - a_r f_k^{(r)}|^2 dx, \quad (1.2.29)$$

если $k \geq N_\varepsilon$. Переходя в (1.2.29) к пределам сначала по $k \rightarrow \infty$, а затем по $\varepsilon \rightarrow 0+$, выводим, что $\|g_r; L_2(I \setminus E_r)\| = 0$. Откуда следует, что $g_r(x) = 0 = a_r(x)f^{(r)}(x)$ для п.в. $x \in I \setminus E_r$.

Далее, из сходимостей $a_0 f_k \rightarrow g_0, f_k \rightarrow f_0$ в $L_2(I)$ следует, что найдутся такие подпоследовательности $\{f_{k_j}\}_{j \geq 1}, \{f_{k_{jm}}\}_{m \geq 1}$, что $\lim_{j \rightarrow \infty} a_0 f_{k_j}(x) = g_0(x), \lim_{m \rightarrow \infty} f_{k_{jm}}(x) = f(x)$ п.в. в E_0 , и следовательно для почти всех $x \in E_0$

$$g_0(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} a_0(x) f_{k_j}(x) = a_0(x) \lim_{m \rightarrow \infty} f_{k_{jm}}(x) = a_0(x) f(x).$$

Тем самым $a_0(x)f(x) = g_0(x)$ п.в. в I . Аналогичные рассуждения приводят к равенству $a_1(x)f(x) = g_1(x)$ п.в. в I .

d) пусть $x_j = x_{j-1} + h(x_{j-1}), x_0 = 0, \Delta_j = [x_{j-1}, x_j] \ (j \geq 1)$. В силу леммы 1.2

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_2(I)} &= \left(\sum_{j \geq 1} \int_{\Delta_j} |f|^2 dt \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left(\sum_{j \geq 1} C(\mathcal{K}_0(x_{j-1}, h(x_{j-1}); a_2^2, 1))^2 \int_{\Delta_j} (a_2^2 |f''|^2 + a_0^2 |f|^2) dt \right)^{1/2} \ll \\ &\ll \sup_{x \geq 0} \mathcal{K}(x, h(x); a_2^2) \|f\|_W. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 1.1 завершено.

Оператор L_0 допускает замыкание в W , если имеет место импликация:

$$\{f_k\} \subset C_0^\infty(I), \quad \|f_k\|_W \rightarrow 0, \quad \|L_0 f_k - z\|_{L_2(I)} \rightarrow 0 \Rightarrow z = 0. \quad (1.2.30)$$

Заметим, что имеет место оценка

$$\|a_1 f_k\|_{L_2(I)} \ll c(\eta) \mathcal{N}(a_2, a_0) \|f_k\|_W \quad (1.2.31)$$

(см. (1.2.24)). В силу (1.2.31)

$$\|z\|_{L_2(I)} \leq [1 + c(\eta) \mathcal{N}(a_2, a_1)] \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k\|_W = 0,$$

откуда следует, что $z = 0$.

Теорема 1.2. Пусть пара (a_2^2, a_0^2) допустима, aa_0^2 удовлетворяет условию регулярности $(\mathfrak{R})$ относительно функции длины $h(\cdot)$, и пусть

$$K(a_2, h(\cdot)) = \sup_{x \geq 0} \left\{ \max_{r=0,1} h(x)^{-r+\frac{3}{2}} \left[\int_x^{x+h(x)} a_2^{-2} dt \right]^{\frac{1}{2}} \right\} < \infty, \quad (1.2.32)$$

$$N(a_2, a_1; h(\cdot)) = \sup_{x \geq 0} \left(\int_x^{x+h(x)} a_1^2 dt \cdot \int_x^{x+h(x)} a_2^{-2} dt \right)^{1/2} < \infty. \quad (1.2.33)$$

Тогда оператор L_0 допускает замкнутое расширение

$$L: L_2(I) \rightarrow L_2(I), \quad D(L) \subset W = W_2^2(a_2^2, a_0^2). \quad (1.2.34)$$

Ниже всюду $K(a_2) = K(a_2, h^\#(\cdot))$, $N(a_2, a_1) = N(a_2, a_1; h^\#(\cdot))$.

Доказательство теоремы 1.2. Существование замкнутого расширения $L: L_2(I) \rightarrow L_2(I)$ следует из теоремы 1.1, в силу которой предел всякой фундаментальной по норме $\|\cdot\|_W$ последовательности $\{f_k\} \subset C_0^\infty(I)$ содержится в $L_2(I)$, и справедливы импликации

$$f_k \in C_0^\infty(I), \|f_k\|_W \rightarrow 0, \|L_0 f_k - z\|_{L_2(I)} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

$$\Rightarrow \|z\|_{L_2(I)} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\|L_0 f_k - z\|_{L_2(I)} + \sum_{r=0}^2 \|a_r f_k^{(r)}\|_{L_2(I)} \right) = 0.$$

Теорема доказана.

Теорема 1.3. Пусть a_j ($j = 0, 1, 2$) удовлетворяют условиям теоремы 1.2. Если к тому же

$$A(a_0, a_1, a_2) = \sup_{x \geq 0} \left(x \int_x^\infty w_-(t) dt \right)^{1/2} < \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad (1.2.35)$$

где

$$w_-(x) = \max \left\{ 0, -\frac{2a_0(x)a_2(x) - a_1^2(x)}{a_2^2(x)} \right\},$$

то оператор L в (10) обратим.

Доказательство теоремы 1.3. Доказательство существенно опирается на теорему 1.1. Достаточно показать, что имеет место импликация:

$$Lf = 0 \Rightarrow f = 0. \quad (1.2.36)$$

Импликацию (1.2.36) докажем от противного. Допустим, что существует ненулевая функция f из области определения L на котором значение оператора равно 0:

$$\exists f \in D(L), Lf = 0, \text{ но } f \neq 0. \quad (1.2.37)$$

ШАГ 1. Согласно определению замыкания оператора L_0 существует последовательность финитных функций $\exists \{f_k\} \subset C_0^\infty(I)$, ($k = 1, 2, \dots$), такая, что f есть предел этой последовательности по норме в W $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$ в W и $Lf = 0$, то есть $\|f_k - f\|_W \rightarrow 0, \|Lf_k\|_2 \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$.

ШАГ 2. Из теоремы 1.1 следует, что $f_k^{(r)} \rightarrow f^{(r)}, a_r f_k^{(r)} \rightarrow a_r f^{(r)}$ при $k \rightarrow \infty, r = 0, 1$. К тому же

$$\exists N \in \mathbb{N}: \|f_k^{(r)}\|_{L_2(I)} \leq 1 + \|f^{(r)}\|_{L_2(I)}, \|f_k\|_W \leq 1 + \|f\|_W, (k \geq N) \quad (1.2.38)$$

Положим $b_r(x) = a_r(x)/a_2(x), r = 0, 1$. Поскольку $a_2(\cdot) > 0$, то равенство $Lf = 0$ равносильно равенству:

$$\tilde{L}f = -f'' + b_1(x)f' + b_0(x)f = 0, f \in D(L) \subset W. \quad (1.2.39)$$

Покажем, что $\|f'\|_{L_2(I)} > 0$. От противного, допустим, что

$$\|f'\|_{L_2(I)} = 0. \quad (1.2.40)$$

По свойству нормы $|f'(x)| = 0$ в $L_2(I)$, т.е. $|f'(x)| = 0$ для п.в. $x \in I$. Поскольку $|f'|$ непрерывна, то $f'(x) \equiv 0$ тождественно равна 0 в I . И т.к. сама функция f ненулевая и непрерывна, то $f(x) \equiv c > 0$. Отсюда следует $\|f\|_{L_2(I)} = \infty$, что невозможно, то есть допущение (1.2.40) не верно.

ШАГ 3. Так как $\|f'\|_{L_2(I)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|f'_k\|_{L_2(I)} > 0$, тогда

$$\exists \delta > 0, N_\delta \in \mathbb{N}: \|f'_k\|_{L_2(I)}^2 \geq \frac{\delta}{2} (k \geq N_\delta). \quad (1.2.41)$$

Произведения функций $f'' \cdot f_k, b_r f^{(r)} f_k, (r = 0, 1)$ суммируемы:

$$\int_0^\infty |f'' \cdot f_k| dx \leq \|f_k\|_{L_\infty(I)} \|a_2 f''\|_{L_2(I)} \|a_2^{-1}\|_{L_2(I)} < \infty,$$

и

$$\int_0^\infty |b_r f^{(r)} f_k| dx \leq \|f_k\|_{L_\infty(I)} \|a_r f^{(r)}\|_{L_2(I)} \|a_2^{-1}\|_{L_2(I)} < \infty.$$

ШАГ 4. Из равенства $\tilde{L}f = 0$ следует, что скалярное произведение

$$(\tilde{L}f, f_k) = - \int_0^\infty f'' \cdot f_k dx + \sum_{r=0}^1 \int_0^\infty b_r(x) f^{(r)} f_k dx = 0. \quad (1.2.42)$$

Представим I как дизъюнктивное объединение $I = \sqcup_{j \geq 0} \Delta_j$, где $\Delta_j = [x_j, x_{j+1})$, $x_{j+1} = x_j + h(x_j)$, $x_0 = 0$. Оценим модуль разности

$$\begin{aligned} F &= \left| \int_0^\infty f'' f_k dx - \int_0^\infty f_k'' f_k dx \right| \leq \sum_{j \geq 0} \int_{\Delta_j} |f_k(f'' - f_k'')| dx \leq \\ &\leq \sum_{j \geq 0} \max_{\Delta_j} |f_k| \int_{\Delta_j} |f'' - f_k''| dx \leq \sum_{j \geq 0} \max_{\Delta_j} |f_k| \int_{\Delta_j} |a_2^{-1} a_2(f'' - f_k'')| dx \leq \\ &\leq \sum_{j \geq 0} \max_{\Delta_j} |f_k| \left(\int_{\Delta_j} a_2^{-2} dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Delta_j} |a_2(f'' - f_k'')|^2 dx \right)^{1/2} \ll \\ &\ll \sum_{j \geq 0} c_j h_j \left(\int_{\Delta_j} |f_k''| dx + h_j^{-3/2} \left(\int_{\Delta_j} |f_k|^2 dx \right)^{1/2} \right)^{1/2} \times \\ &\quad \times \left(\int_{\Delta_j} a_2^{-2} dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Delta_j} |a_2(f'' - f_k'')|^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.2.43)$$

К $h_j^{-3/2} \left(\int_{\Delta_j} |f_k|^2 dx \right)^{1/2}$ применим лемму 1.1 для $\rho = a_2^2, v = a_0^2$:

$$\left(h_j^{-3} \int_{\Delta_j} |f_k|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \int_{\Delta_j} |f_k''| dt + \left[\int_{\Delta_j} a_2^{-2} dt \int_{\Delta_j} a_0^2 |f_k|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\int_{\Delta_j} |f_k''| dx + \left(h_j^{-3} \int_{\Delta_j} |f_k|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq (1 + C_1) \left(\int_{\Delta_j} a_2^{-2} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\int_{\Delta_j} |a_2 f_k''|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\Delta_j} a_0^2 |f_k|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned}$$

Подставим все в (1.2.43) и к последней сумме применим неравенство Коши-Буняковского

$$\begin{aligned}
F &\ll C \sum_{j \geq 0} h_j \int_{\Delta_j} a_2^{-2} dx \left(\int_{\Delta_j} (|a_2 f_k''|^2 + |a_0 f_k|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Delta_j} |a_2 (f - f_k)''|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq C \|f_k\|_W \sum_{j \geq 0} \left(\mathcal{K}(x_j, h_j; a_2) \right)^2 \left(\int_0^\infty |a_2 (f - f_k)''|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq C (K(a_2))^2 \|f_k\|_W \|a_2 (f'' - f_k'')\|_{L_2}.
\end{aligned}$$

где $K(a_2) = \sup_{x>0} \mathcal{K}(x, h(x); a_2)$. Так как $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$ в W , то

$$|(f'' - f_k'', f_k)| = \left| \int_0^\infty f'' f_k dx - \int_0^\infty f_k'' f_k dx \right| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty). \quad (1.2.45)$$

ШАГ 5. Положим $\lambda_k \stackrel{\text{def}}{=} (\tilde{L}f_k, f_k)$:

$$\begin{aligned}
\lambda_k &= \int_0^\infty (-f_k'' + b_1 f_k' + b_0 f_k) \cdot f_k dx \\
&= \int_0^\infty (-f_k'') f_k dx + \int_0^\infty (b_1 f_k' f_k + b_0 f_k^2) dx.
\end{aligned}$$

Интегрируя по частям первый интеграл и дополняя до полного квадрата первое слагаемое второго интеграла, получим:

$$\begin{aligned}
\lambda_k &= \int_0^\infty (f_k')^2 dx + \frac{1}{2} \left(2 \int_0^\infty b_1 f_k' f_k dx \right) + \int_0^\infty b_0 f_k^2 dx = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\infty (f_k')^2 dx + \frac{1}{2} \left(\int_0^\infty (f_k')^2 dx + 2 \int_0^\infty b_1 f_k' f_k dx + \int_0^\infty b_1^2 f_k^2 dx \right) - \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_0^\infty b_1^2 f_k^2 dx + \int_0^\infty b_0 f_k^2 dx \geq \\
&\geq \frac{1}{2} \int_0^\infty (f_k')^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^\infty (2b_0(x) - b_1^2(x)) f_k^2 dx \geq \\
&\geq \frac{1}{2} \int_0^\infty (f_k')^2 dx + \frac{1}{2} \left(\int_0^\infty w_+(x) f_k^2 dx - \int_0^\infty w_-(x) f_k^2 dx \right) \geq \\
&\geq \frac{1}{2} \left(\int_0^\infty (f_k')^2 dx - \int_0^\infty w_-(x) f_k^2 dx \right) \geq \frac{1}{2} \|f_k'\|_{L_2(I)}^2 - \frac{1}{2} \int_0^\infty w_-(x) f_k^2 dx. \quad (1.2.46)
\end{aligned}$$

Оценим интеграл $\int_0^\infty w_-(x) f_k^2 dx$ через неравенство Макенхаупта:

$$\int_0^\infty w_-(x) f_k^2 dx \leq 4A^2 \int_0^\infty |f_k'|^2 dx < \frac{1}{2} \int_0^\infty |f_k'|^2 dx = \frac{1}{2} \|f_k'\|_{L_2(I)}^2, \quad (1.2.47)$$

где $A = A(a_0, a_1, a_2) < \frac{1}{2\sqrt{2}}$ по условию теоремы. В силу (1.2.46), (1.2.47), (1.2.41)

$$\lambda_k \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) \|f_k'\|_{L_2(I)}^2 \geq \frac{1}{8} \delta. \quad (1.2.48)$$

ШАГ 6. Вернемся к равенству (1.2.42), которое перепишем в виде $0 = (\tilde{L}f, f_k) = (\tilde{L}f, f_k) - \lambda_k + \lambda_k = \mu_k + \lambda_k$, где $\mu_k = (\tilde{L}f, f_k) - \lambda_k$.
Последовательность

$$\mu_k = (\tilde{L}f, f_k) - \lambda_k = -(f'' - f_k'', f_k) + \sum_{r=0}^1 (a_r f^{(r)} - a_r f_k^{(r)}, a_2^{-1} f_k) \rightarrow 0,$$

т.к. $\lim_{k \rightarrow \infty} (f'' - f_k'', f_k) = 0$ и (по аналогии (1.2.43))

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}^1 |(a_r f^{(r)} - a_r f_k^{(r)}, a_2^{-1} f_k)| \leq \\ & \leq \sum_{r=0}^1 \sum_{j \geq 0} \sup_{\Delta_j} |f_k| \cdot \left(\int_{\Delta_j} a_2^{-2} dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Delta_j} |a_r f^{(r)} - a_r f_k^{(r)}|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \ll K^2(a_2) \|f_k\|_W \sum_{r=0}^1 \|a_r f^{(r)} - a_r f_k^{(r)}\|_{L_2(I)} \ll \\ & \leq K^2(a_2) (1 + \|f\|_W) \sum_{r=0}^1 \|a_r f^{(r)} - a_r f_k^{(r)}\|_{L_2(I)}. \end{aligned}$$

Можно полагать, что $|\mu_k| \leq \delta/16$, если $k \geq N$. В силу (1.2.46)

$$(\tilde{L}f, f_k) = 0 = \lambda_k + \mu_k \geq \lambda_k - |\mu_k| \geq \frac{1}{8} \delta - \frac{1}{16} \delta = \frac{1}{16} \delta \neq 0.$$

Тем самым допущение (1.2.37) не может иметь места, а верна импликация $f \in D(L), Lf = 0 \Rightarrow f = 0$. Теорема 1.3 доказана.

Пример 2. Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $A = \sqrt{2A_0 + A_1} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$, где

$$A_0 = \sup_{x \geq 0} x \int_x^\infty (1+t)^m a_2^{-1}(t) dt, \quad A_1 = \sup_{x \geq 0} x \int_x^\infty a_2^{-2}(t) dt.$$

Тогда оператор $L_0 y = -a_2(x)y'' + y' - (1+x)^m y$, имеет инъективное замкнутое расширение $L: L_2(I) \rightarrow L_2(I)$, $D(L) \subset W_2^2(I; a_2, (1+x)^{2m})$.

Доказательство. Достаточно, чтобы были выполнены условия теоремы 1.2.

1. Пара $(a_2^2, (1+x)^{2m})$ допустима и функция $a_0^2 = (1+x)^{2m}$ удовлетворяет условию регулярности $(\mathfrak{R})$ на любом промежутке $[x, x+h]$ относительно функции длины $h(x) = h^\#(x; a_2^2, a_0^2)$, т.к.

$$M^\# = M^\#(x, h(x); a_2^2, a_0^2) \geq \left[\eta h^2 \int_x^{x+h(x)} a_2^{-2} dt \int_x^{x+h(x)} (1+x)^{2m} dt \right]^{\frac{1}{2}} \rightarrow \infty,$$

$$h(x) = h^\#(x, a_2^2, a_0^2) < \infty \text{ и } M^\# = 1.$$

2. Обратимся к условиям теоремы 1.2. Если $h(x) \leq 1$, то

$$\mathcal{K}_r(x, h(x); a_2^2) = h(x)^{-r+\frac{3}{2}} \left(\int_x^{x+h} a_2^{-2} dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Из равенства $M^\# = \left[h^3 \int_x^{x+h(x)} a_2^{-2} dt \cdot S^\#(x, h(x); (1+x)^{2m}) \right]^{\frac{1}{2}} = 1$ следует, что при $h(x) \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_r(x, h(x); a_2^2) &\leq \max_{r=0,1} h(x)^{-r} \left(\frac{1}{S^\#(x, h(x); (1+x)^{2m})} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \max_{r=0,1} h(x)^{-r} \left(\frac{\eta}{h(x)} \int_x^{x+h(x)} (1+x)^{2m} dt \right)^{-\frac{1}{2}} \leq \eta^{-\frac{1}{2}} \max_{r=0,1} h(x)^{-r+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Следовательно $K(a_2) = \sup_{x \geq 0} \left\{ \max_{r=0,1} \mathcal{K}_r(x, h(x); a_2^2) \right\} \leq \eta^{-\frac{1}{2}} + \|a_2^{-1}\|_{L_2(I)} < \infty,$

$$\begin{aligned} N(a_2, a_1) &= \sup_{x \geq 0} \left(\int_x^{x+h(x)} 1 dt \cdot \int_x^{x+h(x)} a_2^{-2} dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \sup_{x \geq 0} \mathcal{K}^\#(x; h(x), a_2^2) = K(a_2) < \infty. \end{aligned}$$

Заметим, что $(a_2(x) > 0)$

$$w(x) = -\frac{-2(1+x)^m a_2(x) - 1}{a_2^2(x)} = 2(1+x)^m a_2^{-1}(x) + a_2^{-2}(x) \geq 0.$$

Поэтому

$$A(a_0, a_1, a_2) = \sup_{x \geq 0} \left(x \int_x^\infty w_-(x) dt \right)^{\frac{1}{2}} = A \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Доказательство завершено.

Наиболее близкими по тематике исследований и постановкам задач к данной работе за последнее десятилетие являются работы [9, р. 63-73; 35, р. 1-12; 36, р. 020033; 37, р. 104-109]. Задача об обратимости замкнутого оператора L (в теореме 1.2) равносильна, в силу условия $a_2(\cdot) > 0$, задаче об обратимости оператора

$$\tilde{L}y = -y'' + r(x)y' + q(x)y \quad (1.2.49)$$

(при $r(x) = a_1(x)/a_2(x)$, $q(x) = a_0(x)/a_2(x)$). Свойства операторов вида (1.2.49) существенно зависят от поведения $r(\cdot)$ и $q(\cdot)$ при $x \rightarrow \infty$ [38, с. 4-520]. В работе [10, р. 129-133] одним из условий обратимости операторов вида (1.2.49) является следующее

$$\sup_{x>0} \left[\int_0^x q^2(t) dt \cdot \int_x^\infty r^2(t) dt \right] < \infty.$$

Обратимся к теоремам 1.2, 1.3.

Следствие 1.1. Пусть функция $q(\cdot) \in L_{2,loc}(I)$ и удовлетворяет условию:

(I) существуют такие $\alpha > 1/2$, $m \in \mathbb{N}$, $\mu, m > \mu > 1/2$, что $q(x) \geq \alpha(1+x)^{m-\mu}$.

Функция $r(x) = (1+x)^\nu \sin x^2$, $0 < \nu < \frac{m-\mu}{2}$. Тогда оператор $\tilde{L}$ в (1.2.49) инъективен, как оператор, действующий из пространства $W_2^2(a_2^2, a_0^2)$ в $L_2(I)$, где $a_2(x) = (1+x)^\mu$, $a_0(x) = a_2(x)q(x)$.

Доказательство. Достаточно доказать, что функции $a_0(\cdot)$, $a_2(\cdot)$ и $a_1(x) = a_2(x)r(x)$ удовлетворяют условиям теорем 1.2 и 1.3.

1. Покажем, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h^\#(x; a_2, a_0) = 0, \sup_{x \geq 0} h^\#(x; a_2, a_0) \leq C \quad (1.2.50)$$

с постоянной $C = C(\eta)$. Здесь $\eta = \eta(m)$ параметр условия (R) (см утв. 1.2).

Пусть $h = h^\#(x; a_2, a_0)$. Из условий (R) на функцию $(1+x)^m$ и (I) на $q(\cdot)$ и равенства $M^\#(x, h; a_2^2, a_0^2) = 1$ выводим последовательность оценок:

$$\begin{aligned}
h^3 &\leq \left[\int_x^{x+h} (1+t)^{-2\mu} dt \left(\eta \alpha^2 \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (1+t)^{2m} dt \right) \right]^{-1} \leq \\
&\leq \frac{2m+1}{\eta \alpha^2} \left[(1+x+h)^{2m-2\mu+1} \left(1 - \left(\frac{1+x}{1+x+h} \right)^{2m+1} \right) \right]^{-1} \leq \\
&\leq \frac{2m+1}{\eta \alpha^2} [(1+x+h)^{2(m-\mu)} h]^{-1} \leq C(\eta) \cdot \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{(1+x)^{2(m-\mu)}}. \quad (1.2.51)
\end{aligned}$$

$$h^\#(x; a_2, a_0) = h \leq C(1+x)^{-\frac{m-\mu}{2}}. \quad (1.2.52)$$

Свойства (1.2.50) функции $h^\#(x)$ вытекает из оценки (1.2.52).

2. Покажем, что коэффициенты $a_j(\cdot)$ ($j = 0, 1, 2$) удовлетворяют условиям теорем 1.2, 1.3. Для любого $h = h^\#(x; a_2, a_0)$ из (1.2.50), (1.2.52) следуют оценки:

а)

$$\max_{r=0,1} h^{-r+\frac{3}{2}} \left[\int_x^{x+h} (1+t)^{-2\mu} dt \right]^{1/2} \leq (1+C)^{\frac{5}{2}},$$

б)

$$\begin{aligned}
\int_x^{x+h} a_1^2 dt \cdot \int_x^{x+h} a_2^{-2} dt &\leq h(1+x)^{-2\mu} \int_x^{x+h} (1+t)^{-2\nu} dt \leq \\
&\leq h^2(1+x+h)^{2\nu}(1+x)^{-2\mu} \leq \\
&\leq C^2(1+x)^{2\nu-(m-\mu)}[(1+x+h)(1+x)]^{2\nu} < C^2(1+C)^{2\nu}.
\end{aligned}$$

в) в силу условия (I) на функцию $q(\cdot)$

$$w(x) = \frac{2a_0(x)}{a_2(x)} - \left(\frac{a_1(x)}{a_2(x)} \right)^2 = 2q(x) - (1+x)^{2\nu}(\sin x^2)^2 \geq$$

$$\geq 2\alpha(1+x)^{m-\mu} - (1+x)^{2\nu} > (1+x)^{m-\mu}(1 - (1+x)^{2\nu-(m-\mu)}) > 0,$$

откуда следует, что $-w < 0$, $w_- = \max(0, -w) = 0$. Доказательство завершено.

Одной из целей в работах [9, р. 63-73; 39, р. 25-34] была задача о разрешимости уравнения

$$A y = -\rho(x)(\rho(x)y')' + r(x)y' + q(x)y = f, \quad f \in L_2(\mathbb{R}) \quad (1.2.53)$$

при определенных сравнивающих условиях между регулярными функциями $\rho > 0, \rho', r, q$ и условиями на рост при $|x| \rightarrow \infty$, в частности такие, как: $r \geq \rho^2$,

$$\sup_{x>0} x \int_x^\infty |r^{-1}(t)| dt < \infty, \quad \sup_{x>0} \left[\int_0^x q^2(t) dt \cdot \int_x^\infty r^{-2}(t) dt \right] < \infty.$$

Поскольку $\rho > 0$, рассматриваемая задача равносильна задаче об обратимости оператора

$$\tilde{A}y = -a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y, \quad y \in D(A), \quad (1.2.54)$$

с коэффициентами $a_2(x) = \rho(x)$, $a_1(x) = -\rho'(x) + \frac{r(x)}{\rho(x)}$, $a_0(x) = \frac{q(x)}{\rho(x)}$.

Приведем здесь второе следствие из теорем 1.2, 1.3.

Следствие 1.2. Пусть $\rho(x) = (1+x)^\mu$, $\mu > 1/2$, $r(\cdot), q(\cdot)$ - функции из класса $L_{2,loc}(I)$, удовлетворяют условиям: существуют такие $\alpha > \frac{1}{2}$, $0 < \beta < 1$, $m \in \mathbb{N}$, $m > \mu$, $0 < \nu < \frac{m-\mu}{2}$, что для п.в. x в I

$$(II) \quad q(x) > \alpha(1+x)^{m+\mu},$$

$$(III) \quad |r(x) - \mu(1+x)^{2\mu-1}| \leq \beta(1+x)^{\nu+\mu}.$$

Тогда оператор $\tilde{A}$ в (1.2.54) инъективен, как оператор действующий из $W = W_2^2(a_2^2, a_0^2)$ в $L_2(I)$.

Доказательство. Достаточно показать, что коэффициенты $a_j(\cdot)$ в удовлетворяют условиям теорем 1.2, 1.3. В силу (II) для функции $h^\#(x; a_2, a_0)$ выполнены условия (1.2.50). Следовательно:

$$а) \quad K(a_2) \leq (1+C)^{5/2},$$

б) для любого $h = h^\#(x; a_2, a_0)$ из (III) следует, что

$$\begin{aligned} & \int_x^{x+h} a_1^2 dt \cdot \int_x^{x+h} a_2^{-2} dt \leq h \int_x^{x+h} \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^2 \left(\frac{1+x+h}{1+x} \right)^{2\mu} dt < \\ & < \beta^2 h (1+C)^{2\mu} \int_x^{x+h} (1+t)^{2\nu} dt \leq (C\beta)^2 (1+C)^{2\mu} \frac{(1+x+h)^{2\nu}}{(1+x)^{m-\mu}} < \\ & < (C\beta)^2 (1+C)^{2(\mu+\nu)}. \end{aligned}$$

в) в силу (II), (III)

$$\begin{aligned} 2q(x) - |a_1(x)|^2 & \geq 2\alpha(1+x)^{m+\mu} - \beta^2(1+x)^{2\nu} > \\ & > (1+x)^{m+\mu} [1 - (1+x)^{2\nu-(m-\mu)}] > 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что $w_-(x) = 0$ для п.в. x в I .

1.3 О наилучших линейных приближениях для решений уравнения $Ly = f$

Пусть L - замкнутый инъективный оператор из п. 1.2. Рассмотрим уравнение

$$Ly = f, \quad f \in BL_2(I) \quad (1.3.1)$$

в случае, когда оператор L удовлетворяет квазикозерцитивному условию

$$\|y\|_W \leq c_0(\|Ly\|_{L_2(I)} + \|y\|_X), \quad y \in D(L), \quad (1.3.2)$$

где X - полунормированное пространство функций, определенных на $I = [0; \infty)$; $BL_2(I)$ - единичный замкнутый шар в $L_2(I)$. При этом предполагается, что $W \hookrightarrow X$.

Из данного вложения и неравенства (1.3.2) следует, что каждое решение y уравнения (1.3.1) входит в один из классов

$$F_k = kBX \cap c_kBW, \quad c_k = c_0(1 + k), \quad k = 1, 2, 3 \dots$$

Действительно, в силу вложения $W \hookrightarrow X$ следует, что $y = L^{-1}f \in X$ и $\|y\|_W \leq c_0(1 + k_y)$, где $k_y = \min\{k \in \mathbb{N}: \|y\|_X \leq k\}$, существует такая c_0 , что $\|y\|_X \leq c_0\|y\|_W$, $y \in W$.

Введем обозначения. Пусть E_1, E_2 - банаховы пространства, $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{A}(E_1 \rightarrow E_2)$, - множество всех ограниченных линейных операторов, действующих из E_1 в E_2 , $\mathfrak{A}_n = \mathfrak{A}_n(E_1 \rightarrow E_2)$, - семейство всех линейных операторов $U: E_1 \rightarrow E_2$ размерности $\leq n$. Положим $\|S\| = a_0(S; E_1, E_2)$.

Определение. [40, с. 4-530] Пусть $S \in \mathfrak{A}(E_1 \rightarrow E_2)$. Величина

$$a_n(S; E_1, E_2) = \inf\{\|S - U\|, U \in \mathfrak{A}_n(E_1 \rightarrow E_2)\},$$

называется n -м аппроксимативным числом оператора S .

Легко увидеть, что

$$\|S\| = a_0(S; E_1, E_2) \geq a_1(S; E_1, E_2) \geq \dots \geq a_n(S; E_1, E_2) \geq a_{n+1}(S; E_1, E_2) \geq \dots$$

Оценка сверху аппроксимативных чисел $a_n(\mathcal{L}; W; L_2(I))$ оператора вложения $\mathcal{L}: W \hookrightarrow L_2(I)$ позволяет получить оценку наилучшего приближения линейными методами множества решений из c_kBW уравнения (1.3.1) т.к.

$$\begin{aligned} & \inf_{U \in \mathfrak{A}_n} \sup_{y \in cBW} \|y - Uy\|_{L_2(I)} = \\ & = c \inf_{U \in \mathfrak{A}_n} \sup_{y \in BW} \|y - Uy\|_{L_2(I)} = ca_n(\mathcal{L}; W; L_2(I)). \end{aligned}$$

Через $N(\lambda; \mathcal{L}(\Omega))$ будет обозначаться считающая функция

$$N(\lambda; \mathcal{L}(\Omega)) = \sum_{a_k(\mathcal{L}(\Omega)) > \lambda} 1,$$

где $a_k(\mathcal{L}(\Omega)) = a_k(\mathcal{L}(\Omega); W(\Omega), L_2(\Omega))$, $\mathcal{L}(\Omega)$ – оператор вложения $W(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega)$, (Ω – интервал в I).

Введем максимальный оператор по базису промежутков, соотнесенному функции длины $h(\cdot)$ в I . Пусть

$$\mathcal{B}_x = \{\Delta = [\alpha, \beta]: x \in \Delta \text{ и } \exists \Delta y = [y, y + h(y)) \supset \Delta\},$$

$$Mf(x, h(\cdot)) = \sup_{\Delta \in \mathcal{B}_x} \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} |f(t)| dt, \quad f \in L_{loc}(I).$$

Далее пусть $h^\#(x) = h^\#(x; \rho, a_0^2)$, $\Omega(\lambda) = \{x > 0: h^\#(x; \rho, 4\eta a_0^2) M\rho^{-1}(x, h^\#(\cdot)) > \frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\}$, где $\rho = a_2^2$, $0 < \eta < 1$,

$$\Psi(\lambda) = \lambda^{-\frac{1}{2}} \left[\int_{\Omega(\lambda)} \left(M\rho^{-1}(x; h^\#(\cdot)) \right)^{\frac{1}{4}} dx \right], \quad \lambda > 0,$$

функция $\Psi(\cdot)$ строго монотонно убывает на оси $(0, \infty)$. Пусть $\Phi(\cdot)$ обратная к $\Psi(\cdot)$.

Теорема 1.4. Пусть выполнены условия:

i) $a_0^2 \geq 1$ удовлетворяет условию регулярности ($\mathfrak{R}$) относительно ф. д. $h^\#(x)$ с постоянной η , и пусть

$$\sup_{x \geq 0} h^\#(x)^3 \int_x^{x+h^\#(x)} a_2^{-2} dt < \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h^\#(x)^3 \int_x^{x+h^\#(x)} a_2^{-2} dt = 0.$$

ii) пространство $W = W_2^2(a_2^2, a_0^2)$ вложено в полунормированное пространство X и имеет место оценка (1.3.2).

Тогда для всех решений $y \in kBX$ уравнения (1.3.1)

$$\inf_{U \in \mathcal{U}_n} \|y - Uy\|_{L_2(I)} \leq c_k \Phi\left(\frac{n}{8}\right) \quad (n \geq 10). \quad (1.3.3)$$

Доказательство теоремы 1.4. Пусть $\Delta^\#(x) = [x, x + h^\#(x))$, $\rho(x) = (a_2(x))^2$. Положим

$$K(x, h) = h^{\frac{3}{2}} \left(\int_x^{x+h} \frac{1}{\rho} dt \right)^{\frac{1}{2}}, H_x = \{h > 0: K(x, h) \leq \lambda\}.$$

Поскольку $K(x, h)$ возрастает по $h > 0$ и $\lim_{h \rightarrow \infty} K(x, h) = 0$ при $h \rightarrow \infty$, то H_x есть промежуток вида $(0, b]$, $K(x, b) = \lambda$. Поэтому:

$$0 < \tilde{h}(x, \lambda) = \sup\{h > 0: K(x, h) \leq \lambda\} < \infty \quad (\lambda > 0),$$

$$K(x, \tilde{h}(x, \lambda)) = \lambda, \quad (1.3.4)$$

и тем самым $\tilde{h}(x, \lambda) < h^\#(x)$, если $K^\#(x) = K(x, h^\#(x)) > \lambda$.

Представим I как $\sqcup_{j=1}^\infty \Delta_j$, где $\Delta_j = [x_j, x_{j+1})$, $x_{j+1} = x_j + h_j$, $h_j = \tilde{h}(x_j, \lambda)$, $x_1 = 0$. Покажем, что считающая функция

$$\begin{aligned} N(c\lambda; W, L_2(I)) &= \sum_{a_k(W, L_2(I)) > \lambda} 1 \leq \\ &\leq 2 \sum_{j=1}^m N(\lambda; W(\Delta_j), L_2(\Delta_j)). \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

Применяя (1.3.5), а затем равенство (1.3.4) выводим:

$$N(\lambda; W, L_2(I)) \leq 2 \sum_{j: K^\#(x_j) > \lambda} \left(\lambda^{-1} K(x_j, h_j) \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.3.6)$$

Положим $x_\lambda = \max\{x > 0: K^\#(x) \geq \lambda\}$, и пусть $m = \max\{j \geq 1: x_j \leq x_\lambda\}$. Согласно определению считающей функции $N(\lambda; \mathcal{L}(\Delta_j))$ существует такой оператор $U_j \in U_n(W(\Delta_j) \rightarrow L_2(\Delta_j))$, $n = N(\lambda; \mathcal{L}(\Delta_j)) + 1$ ($\leq 2N(\lambda; L(\Delta_j))$), что

$$\|\mathcal{L}(\Delta_j) - U_j; L_2(\Delta_j)\| = \sup_{y \in BW(\Delta_j)} \|y - U_j y; L_2(\Delta_j)\| < (1 + \varepsilon)\lambda, \quad (1.3.7)$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно мало. Зададим оператор $U \in U_n(W \rightarrow L_2(I))$, равенством

$$Uy(x) = \sum_{j=1}^m \chi_j(x) U_j(\chi_j, y)(x), \quad x \geq 0.$$

Легко увидеть, что

$$\dim U \leq \sum_{j=1}^m \dim U_j \leq 2 \sum_{j=1}^m N(\lambda; \mathcal{L}(\Delta_j)). \quad (1.3.8)$$

В силу оценок (1.3.7) и (1.2.22) (лемма 1.2) для любого $y \in BW$

$$\begin{aligned} \|y - Uy; L_2(I)\| &= \left\{ \sum_{k=1}^m \int_{\Delta_k} |y - U_k(\chi_k y)|^2 dx + \sum_{k \geq m+1} \int_{\Delta^\#(\chi_k)} |y|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left\{ ((1+\varepsilon)\lambda)^2 \sum_{k=1}^m \|y; W(\Delta_k)\|^2 + c(\eta)^2 \sum_{k \geq m+1} \left(h^\#(\chi_k)^3 \int_{\Delta^\#(\chi_k)} a_2^{-2} dt \right) \|y; W(\Delta_k^\#)\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq [(1+\varepsilon) + c(\eta)]\lambda \|y; W\| \leq 1 + \varepsilon + c(\eta). \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

Переходя в (1.3.9) к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0+$, выводим:

$$\sup_{y \in BW} \|y - Uy; L_2(I)\| \leq (1 + c(\eta))\lambda. \quad (1.3.10)$$

Оценка (1.3.7) с постоянной $c = (1 + c(\eta)) - 1$ следует из (1.3.8) и (1.3.9). Покажем теперь, что

$$N(\lambda; W, L_2(I)) \leq 4 \sum_{j: K^\#(x_j) > \lambda} \left(\lambda^{-1} K(x_j, h_j) \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.3.11)$$

Положим $U_x(y_t) = y(x) + y'(x)(t - x)$, $\Delta(x) = [x, x + \tilde{h}(x, \lambda)]$. Из оценки:

$$\begin{aligned} \left[\int_{\Delta(x)} |y - U_x y|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} &= \left[\int_{\Delta(x)} \left(\int_x^t (t - \xi) y''(\xi) d\xi \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left(\tilde{h}(x, \lambda)^3 \int_{\Delta(x)} a_2^{-2} dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Delta(x)} |a_2 y''|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq K(x, \tilde{h}(x, \lambda)) \|y; W(\Delta(x))\| \leq \lambda, \end{aligned}$$

справедливой для $x \leq x_\lambda$, $\|y; W(\Delta(x))\| \leq 1$ следует, что для всех $j \leq m$

$$N(\lambda; W(\Delta_j), L_2(\Delta_j)) \leq 2 = \lambda^{-1} K(x_j, \tilde{h}(x_j, \lambda)).$$

Поскольку $\Delta_j \subset \Delta(x_j) = [x_j, x_j + h^\#(x_j))$, $j \leq m$, то $\Delta_j \in \mathcal{B}_t$ для всех $t \in \Delta_j$. Поэтому ($\rho = a_2^{-2}$) в силу (1.3.11)

$$\begin{aligned} N(\lambda; W, L_2(I)) &\leq 4\lambda^{-\frac{1}{2}} \sum_{j: K^\#(x_j) > \lambda} \left[2 \int_{x_j}^{x_j + \frac{h_j}{2}} \left(\frac{1}{h_j} \int_{\Delta_j} \frac{1}{\rho} dt \right)^{\frac{1}{4}} \right] \leq \\ &\leq 8\lambda^{-\frac{1}{2}} \sum_{j: K^\#(x_j) > \lambda} \int_{x_j}^{x_j + \frac{h_j}{2}} M\rho^{-1}(t, h^\#(\cdot))^{\frac{1}{4}} dt. \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

Далее, для $t \in [x_j, x_j + h_j/2] \subset [x_j, x_j + h^\#(x_j)/2]$

$$\begin{aligned} M^\#(t, h^\#(x)/2; \rho, 4\eta a_0^2) &\leq \\ &\leq \left[\frac{1}{8} (h^\#(x))^3 \left(\int_{\Delta^\#(x)} \frac{1}{\rho} dt \right) \left(\eta \frac{8}{h^\#(x)} \int_{\Delta^\#(x)} a_0^2 dt \right) \right]^{1/2} \leq \\ &\leq M^\#(x, h^\#(x); \rho, a_0^2) = 1 \end{aligned}$$

откуда следует, что для всех $t \in [x_j, x_j + \frac{h_j}{2}]$, $j \geq m$ имеют место оценки:

$$\begin{aligned} h^\#(t; \rho, 4\eta a_0^2) &\geq \frac{h^\#(x_j)}{2}, \\ [h^\#(t; \rho, 4\eta a_0^2)]^2 (M\rho^{-1}(t, h^\#(\cdot)))^{\frac{1}{2}} &\geq \frac{1}{4} \left[h^\#(x_j)^3 \int_{\Delta^\#(x_j)} \rho^{-1} dt \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} K^\#(x) > \frac{1}{4} \lambda. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\left[x_j, x_j + \frac{h_j}{2} \right] \subset \left\{ t \geq 0: M\rho^{-1}(t, h^\#(\cdot)) > (4^{-1}\lambda)^2 (h^\#(t; \rho, 4\eta a_0^2))^{-4} \right\} = \Omega(\lambda),$$

$1 \leq j \leq m$. Обращаясь к оценке (1.3.12), последовательно выводим

$$n \leq N(a_n; W, L_2(I)) \leq 8\Psi(a_n),$$

$$a_n(W, L_2(I)) \leq \Phi\left(\frac{n}{8}\right). \quad (1.3.13)$$

Оценка (1.3.3) следует из (1.3.13). Теорема 1.4 доказана.

2 ОБ АППРОКСИМАЦИИ ОДНОГО СИНГУЛЯРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НА ОСИ

2.1 Об операторе типа Трибеля на полуоси

В этом подразделе рассматривается оператор

$$Ty = -\rho_0^\mu(x)y'' + q_1(x)y' + (q_0(x) + \rho_0^\nu(x))y_0 \quad (\mu > 0, \nu > \mu + 2) \quad (2.1.1)$$

с коэффициентами $\rho_0 \geq 1, q_0, q_1$ из пространства $C^\infty(I)$, удовлетворяющими условиям:

- i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \rho_0(x) = \infty$,
- ii) $|\rho_0^{(k)}(x)| = O(\rho_0^{1+k}(x)), k = 0, 1, \dots$,
- iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{q_0^{(k)}(x)}{\rho_0^{\nu+k}(x)} = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{q_1^{(k)}(x)}{\rho_0^{k+(\nu+\mu)/2}(x)} = 0$,

при $x \rightarrow \infty$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Запись $|f| = O(g)$ при $x \rightarrow \infty$ означает, что существуют такие $c > 0, a > 0$, что $|f(x)| \leq cg(x)$ как только $x \geq a$.

Полагая $b_1 = -1, b_0 = 1, a_k(x) = q_k(x), k = 0, 1, \nu > \mu + 2$, мы можем записать оператор T в (2.1.1) как

$$Ty = \sum_{k=0}^1 \rho^{\kappa_{2k}}(x) b_k(x) y^{(2k)} + \sum_{k=0}^1 a_k(x) y^{(k)},$$

$\kappa_s = \frac{1}{2}(\nu(2-s) + \mu s), s = 0, 2$, с коэффициентами $\rho(x) = \rho_0(x), a_k(x), b_k(x)$ ($k = 0, 1$), удовлетворяющими условиям переменных коэффициентов операторов из класса Трибеля $\mathcal{U}_{\mu, \nu}^m(\Omega; \rho)$ при $m = 1, \Omega = I$ (см. [41, с. 4-660]), но только при $x \rightarrow +\infty$. Класс $\mathcal{U}_{\mu, \nu}^m(\Omega; \rho)$ является довольно широким классом дифференциальных операторов, связанных с исследованием ядерных функциональных пространств.

В силу условия i) существует такое $t > 0$, что $\rho_0(x) > 1$ при $x \geq t$. Поэтому всюду ниже будем полагать $\rho_0 \geq 1$.

Обозначим через $V = V_{2, (\mu, \nu)}^2(I)$ пополнение класса $C_0^\infty(I)$ бесконечно дифференцируемых и финитных в I функций по норме

$$\|y\|_V = \|y\|_{V_{2, (\mu, \nu)}^2(\rho_0)} = \left[\int_0^\infty \left(|\rho_0^\mu y''|^2 + \left| \rho_0^{\frac{\nu+\mu}{2}} y' \right|^2 + |\rho_0^\nu y|^2 \right) dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Допустим, что

$$\sup_{x \geq 0} |q_0(x) \rho_0^{-\nu}(x)| = \beta_0 < 1, \sup_{x \geq 0} |q_1(x) \rho_0^{\frac{\nu+\mu}{2}}(x)| = \beta_1 < \infty. \quad (2.1.2)$$

В силу этого для минимального оператора

$$T_0 = Ty, y \in C_0^\infty(I)$$

имеет место оценка

$$\|T_0 y\|_{L_2(I)} \leq (1 + \beta_0 + \beta_1) \|y\|_V, \quad (2.1.3)$$

из которой следует, что оператор $T_0: V \rightarrow L_2(I)$ ограничен и, следовательно, имеет замкнутое расширение T с областью определения

$$D(T) \subset V_{2,(\mu,\nu)}^2(\rho_0).$$

Мы определились с оператором T в (2.1.1). Норма $\|T\| \leq 1 + \beta_0 + \beta_1$.

Теорема 2.1. Пространство V состоит из функций $y \in L_2(I)$, имеющих п.в. в I конечные производные y', y'' и норму $\|y\|_V < \infty$.

Доказательство теоремы 2.1. Пусть $\{y_i\}$ - фундаментальная по норме $\|\cdot\|_V$ последовательность функций $y_i \in C_0^\infty(I)$. Тогда каждая из последовательностей $\{a_r y_j^{(r)}\}, \{y_j^{(r)}\} \left(a(x) = \rho_0^{\frac{(2-k)\nu+k\mu}{2}}(x), r = 0, 1, 2 \right)$ являются фундаментальными в $L_2(I)$.

Положим $f_r = \lim_{j \rightarrow \infty} y_j^{(r)}, \tilde{f}_r = \lim_{j \rightarrow \infty} a_r y_j^{(r)}$ в $L_2(I)$. Существует такая подпоследовательность $\{y_{j_m}\}$, что

$$f_r(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{j_k}^{(r)}, \tilde{f}_r(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} a_r y_{j_k}^{(r)} \text{ п. в. в } I. \quad (2.1.4)$$

См. [57, с. 4-750]. Из леммы 1.1 следует, что f_0 имеет п.в. в I конечные производные $f_0^{(r)}$ и $y_j^{(r)} \rightarrow f_0^{(r)}$ в $L_{2,loc}(I)$. Возьмем представление $I = \cup_{j \geq 1} [a_j, b_j]$, где $a_{j+1} = b_j > a_j (a_0 = 0), a_j \rightarrow \infty$. На каждом $\Delta_j = [a_j, b_j]$ функции $f_r = f_0^{(r)}$ п.в., что следует из оценки

$$\|f_r - f_0^{(r)}\|_{L_2(\Delta_j)} \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\|f_r - y_j^{(r)}\|_{L_2(\Delta_j)} + \|y_j^{(r)} - f_0^{(r)}\|_{L_2(\Delta_j)} \right) = 0.$$

Следовательно, $f_r = f_0^{(r)}$ п.в. в I и в силу (2.1.4):

$$\|a_r f_0^{(r)}\|_{L_2(I)} = \|a_r f_r\|_{L_2(I)} = \|\tilde{f}_r\|_{L_2(I)} < \infty \quad (r = 0, 1, 2),$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|f_0 - y_j\|_V = \sum_{r=0}^2 \lim_{j \rightarrow \infty} \|\tilde{f}_r - a_r y_j^{(r)}\|_{L_2(I)} = 0.$$

Теорема 2.2. Пусть выполнены условия

$$\beta_0 = \sup_{x \geq 0} |q_0(x) \rho_0^{-\nu}(x)| < 1,$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2(1 + \beta_0)} \sup_{x \geq 0} \left[\left((\rho_0^\mu)'(x) \right)^2 + (q_1(x))^2 \right] \rho_0^{-(\nu+\mu)}(x) < 1. \quad (2.1.5)$$

Тогда оператор T имеет обратный T^{-1} . При этом

$$\|T^{-1}: L_2(I) \rightarrow L_2(I)\| \leq C = \frac{1}{(1 - \beta_0)(1 - \beta_2)}. \quad (2.1.6)$$

Доказательство теоремы 2.2. Положим $a_0(x) = q_0(x) + \rho_0^\nu(x)$, $a_1(x) = q_1(x)$, $a_2(x) = \rho_0^\mu(x)$.

1. Пусть $y \in C_0^\infty(I)$. В этом случае

$$\begin{aligned} (Ty, y) &= \int_0^\infty [a_2'(x) y' y - (a_2(x) y')' y] dx + \int_0^\infty a_1(x) y' y dx + \int_0^\infty a_0(x) y^2 dx = \\ &= \int_0^\infty \left[(\sqrt{a_2(x)} y')^2 + (a_2'(x) + a_1(x)) y' y + a_0(x) y^2 \right] dx = \\ &= \int_0^\infty \left[\sqrt{a_2(x)} y' + \frac{a_2'(x) + a_1(x)}{2\sqrt{a_2(x)}} y \right]^2 dx + \int_0^\infty w(x) y^2 dx \geq \int_0^\infty w(x) y^2 dx, \end{aligned}$$

где $w(x) = a_0(x) - \frac{(a_2'(x) + a_1(x))^2}{4a_2(x)}$. В силу условий (2.1.5) и $\rho_0 \geq 1$:

$$a_0(x) = \rho^\nu(x) (1 + q_0(x) \rho^{-\nu}(x)) \geq (1 - \beta_0) \rho_0^\nu \geq 1 - \beta_0,$$

$$\frac{(a_2'(x) + a_1(x))^2}{4a_0(x)a_2(x)} \leq \frac{1}{2(1 + \beta_0)} \left[\left((\rho_0^\mu)'(x) \right)^2 + (q_1(x))^2 \right] \rho^{-(\nu+\mu)} \leq \beta_2,$$

откуда следуют оценки:

$$w(x) \geq (1 - \beta_0)(1 - \beta_2),$$

$$\|T_0 y\|_{L_2(I)} \|y\|_{L_2(I)} \geq |(Ty, y)| \geq (1 - \beta_0)(1 - \beta_2) \|y\|_{L_2(I)}^2,$$

$$\|Ty\|_{L_2(I)} \geq (1 - \beta_0)(1 - \beta_2) \|y\|_{L_2(I)}. \quad (2.1.7)$$

Из (2.1.7) следует, что оператор T_0 инъективен и

$$\|T_0: L_2(I) \rightarrow L_2(I)\| \leq \frac{1}{(1 - \beta_0)(1 - \beta_2)}. \quad (2.1.8)$$

2. Пусть $y \in V = V_{2,(\mu,\nu)}^2$, $\{y_j\}$ - последовательность из $C_0^\infty(I)$, сходящаяся к y в V . Поскольку $y_k \rightarrow y$ в $L_2(I)$, то для $y \in D(T)$ в силу (2.1.7)

$$\|Ty\|_{L_2(I)} = \lim_{j \rightarrow \infty} \|Ty_j\|_{L_2(I)} \geq (1 - \beta_0)(1 - \beta_2) \|y\|_{L_2(I)}.$$

Следовательно, существует обратный оператор T^{-1} и справедлива оценка (2.1.6).

2.2 О линейных аппроксимациях решений уравнения $Ty = f$

Рассмотрим задачу о наилучших линейных приближениях для решений уравнения

$$Ty \equiv -\rho_0^\mu(x)y'' + q_1(x)y' + (q_0(x) + \rho_0^\nu(x))y_0 = f, f \in L_2(I). \quad (2.2.1)$$

В этом подразделе мы полагаем выполненными условия теорем 2.1-2.2. Понятно, что можно ограничиться решениями уравнения (2.2.1) с правой частью $f \in BL_2(I)$. Множество $F = \{y \in D(T): \|Ty\|_{L_2(I)} \leq 1\}$. Из (2.1.6) следует, что множество

$$F = T^{-1}(BL_2(I)) \cap D(T) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k,$$

где $F_k = k(BV)$.

Пусть Q - ограниченное множество в банаховом пространстве X , содержащее 0, $\mathcal{U}_k(Q, X)$ - класс всех непрерывных линейных операторов $U: X \rightarrow X$ размерности $\leq n$ (включая оператор $U = 0$). Величину

$$\lambda_n(Q, X) = \inf_{U \in \mathcal{U}_n(X)} \sup_{x \in Q} \|x - Ux\|_X$$

называют линейным n -поперечником Q в X . Поперечники $\lambda_n(Q, X)$ связаны с задачей о наилучшем (линейном) методе приближения множества Q в X .

Из равенства $\lambda_n(F_k, L_2(I)) = k\lambda_n(BV; L_2(I))$ следует, что достаточно получить оценку для считающей функции

$$\mathcal{N}(\lambda; BV, L_2(I)) = \sum_{\lambda_n(BV, L_2(I)) > \lambda} 1.$$

Пусть $\rho, v \in L_{loc}^+(I), \rho > 0, \rho^{-1} = 1/\rho \in L_{loc}(I), \delta \in (0, 1)$. Положим

$$S_{(\delta)}(x, h; v) = \inf_{\{e\}_\delta} \int_{\Delta \setminus e} v dt, \quad \Delta = [x, x + h],$$

где $\inf$ берется по совокупности $\{e\}_\delta$ всех замкнутых множеств $e \subset \Delta$ с мерой $|e| \leq \delta|\Delta| = \delta h$,

$$M_{(\delta)}(x, h; \rho, v) = h \left(\int_x^{x+h} \rho^{-1} dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(S_{(\delta)}(x, h; v) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Пусть $h(\cdot)$ - положительная конечная функция в I . Функцию $h(\cdot)$ будем называть функцией длины в I (по отношению к паре (ρ, v)), если

$$M_{(\delta)}(x, h(x); \rho, v) \geq 1, (x \in I). \quad (2.2.2)$$

Будем говорить, что пара (ρ, v) допустима относительно ф.д. $h(\cdot)$ в I , если выполняется (2.2.2).

Положим

$$h_{(\delta)}(x; \rho, v) = \sup\{h > 0: M_{(\delta)}(x, h; \rho, v) \leq 1\}. \quad (2.2.3)$$

Поскольку $\lim M_{(\delta)}(x, h; \rho, v) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0+$, то $h_{(\delta)}(x; \rho, v) > 0$ в I .

Пример 3. Пусть $\rho(x) = (1 - \delta)(1 + x)^\mu$, $v(x) = (1 + x)^\lambda$, $\lambda > \mu > 1$. Тогда (ρ, v) допустима относительно ф.д. $h(x) = (1 + x)^{(\mu - \lambda)/4}$.

Ниже мы покажем, что пара (ρ, v) , где $\rho = \rho_0^{2\mu}, v = (q_0 + \rho_0^\nu)^2$ допустима относительно ф.д. $h_{(\delta)}(x; \rho, v)$.

Утверждение 2.1

а) если

$$h_{(\delta)}(x; \rho, v) < \infty, \quad (2.2.4)$$

то имеет место равенство

$$M_{(\delta)}(x, h_{(\delta)}(x; \rho, v); \rho, v) = 1. \quad (2.2.5)$$

б) если $\rho = \rho_0^{2\mu}, v = (q_0 + \rho_0^\nu)^2$, то

$$h_{(\delta)}(x) = h_{(\delta)}(x; \rho, v) < \infty \quad (x \geq 0).$$

Доказательство. а) существует последовательность $h_j > 0$ ($j \in \mathbb{N}$) сходящаяся к $h = h_\delta(x)$ и такая, что $M_{(\delta)}(x, h_j; \rho, v) \leq 1$. Пусть $\Delta_j = [x, x + h_j]$. Переход к пределу (при $j \rightarrow \infty$) в тривиальной оценке

$$h_j^2 \int_{\Delta_j} \rho^{-1} d\xi S_{(\delta)}(x, h; \rho, v) \leq M_{(\delta)}^2(x, h; \rho, v) + h_j^2 \int_{\Delta_j} \rho^{-1} d\xi \int_{x+h_j}^{x+h} v d\xi,$$

приводит к неравенству

$$M_{(\delta)}(x, h_\delta(x; \rho, v); \rho, v) \leq 1.$$

С другой стороны, существует последовательность $h'_j > h$, $M_{(\delta)}(x, h'_j; \rho, v) > 1$. Пусть $\Delta'_j = [x, x + h]$ с мерой $|e| \leq \delta h$

$$(h'_j)^2 \int_{\Delta'_j} \rho^{-1} d\xi \int_{\Delta'_j \setminus e} v d\xi > 1. \quad (2.2.6)$$

Переход к пределу в (2.2.6) (при $j \rightarrow \infty$) приводит к оценкам

$$h^2 \int_{\Delta} \rho^{-1} d\xi \int_{\Delta \setminus e} v d\xi \geq 1, \quad M_{(\delta)}(x, h_\delta(x; \rho, v)) \geq 1.$$

б) утверждение тривиально следует из оценок

$$(1 - \delta)h < S_{(\delta)}(x, h; \rho_0^{2v}) \leq \int_x^{x+h} \rho_0^{2v} d\xi.$$

Замечание. Если $h(\cdot)$ функция длины по отношению к паре (ρ, v) , то $0 < h_{(\delta)}(x; \rho, v) \leq h(x)$, ($x \geq 0$).

Введем максимальный оператор по базису промежутков, соотнесенному функции длины $h(\cdot)$ в I . Пусть

$$\mathcal{B} = \bigcup_{y \geq 0} \{\Delta = [\alpha, \beta): y \leq \alpha < \beta \leq y + h(y)\}, \quad \mathcal{B}_x = \{\Delta = \mathcal{B}: x \in \Delta\}.$$

Положим

$$M^* f(x, h(\cdot)) = \sup_{\Delta \in \mathcal{B}_x} \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} |f(t)| dt, \quad f \in L_{loc}(I),$$

$$M_{(\delta)}^* f(x) = M^* f(x, h_{(\delta)}(\cdot)),$$

$$K_{(\delta)}(x, h; \rho, v) = h^{\frac{3}{2}} \left[\int_x^{x+h} \rho^{-1}(t) dt \right]^{\frac{1}{2}}, \quad h = h_{(\delta)}(x; \rho, v),$$

$$K_{(\delta)}(x) = h^{3/2} \left[\int_x^{x+h} \rho_0^{-2\mu}(t) dt \right]^{1/2}, \quad \text{если } \rho = \rho_0^{2\mu}, v = \rho_0^{2\nu}.$$

Теорема 2.3. Пусть $\lim_{x \rightarrow \infty} K_{(\delta)}(x) = 0$ ($0 < \delta < \frac{1}{2}$).

Тогда существует такое $c(\delta) > 1$, что

$$\mathcal{N}(\lambda; F_k, L_2(I)) \leq \sqrt{\frac{c}{\lambda}} \int_{G(c^{-1}\lambda)} (M_{(\delta)}^* \rho_0^{-2\mu})^{\frac{1}{4}} dx,$$

где $G(\lambda) = \left\{ x > 0: h_{(\delta)}(x) (M_{(\delta)}^* \rho_0^{-2\mu})^{\frac{1}{4}} > \lambda^{\frac{1}{2}} \right\}$, $c = 4kc(\delta)c(\mu, v)$.

Доказательство теоремы 2.3 построено на следующих утверждениях.

Лемма 2.1 [24, с. 3-8]. Пусть $M_{(\delta)}(x, h; \rho, v) \geq 1$. Существует такое $c(\delta) > 1$, что для всех $y \in C_0^\infty(I)$

$$\left(\int_x^{x+h} |y|^2 d\xi \right)^{1/2} \leq c(\delta) K_{(\delta)}(x, h; \rho, v) \left[\int_x^{x+h} (\rho(\xi) |y''|^2 + v(\xi) |y|^2) d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.2.1)$$

Положим на промежутках $\Delta \subset I$ ($1 \leq \rho < \infty$)

$$\|y\|_{W(\Delta)} = \|\rho_0^\mu y''\|_{L_2(\Delta)} + \|\rho_0^\nu y\|_{L_2(\Delta)}.$$

Пусть $W(\Delta)$ для $\Delta = [a, b]$ ($0 \leq a < b < \infty$) - пространство $C^\infty(\Delta)$ с нормой $W(\Delta)$. Через $W = W_{2,(\mu,\nu)}^2$ будет обозначаться пополнение класса $C_0^\infty(I)$ по норме $\|y; W(I)\|$. Нетрудно увидеть, что

$$K_{(\delta)}(x) \leq \frac{1}{\sqrt{1-\delta}}. \quad (2.2.8)$$

Действительно, взяв $h = h_{(\delta)}(x)$, $\Delta = [x, x+h]$, выводим:

$$h \left(\int_\Delta \rho_0^{-2\mu} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\inf_{\{e\}_\delta} \int_{\Delta \setminus e} \rho_0^{2\nu} d\xi \right)^{-\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{h(1-\delta)}},$$

откуда следует (2.2.8).

Лемма 2.2. Справедлива оценка

$$\|y; L_2(I)\| \leq c(\delta) \|y; W_{2,(\mu,\nu)}^2(I)\|, \quad y \in C_0^\infty(I). \quad (2.2.9)$$

Доказательство. Пусть $\text{supp } y \subset [\xi_0, \xi_1]$, $0 \leq \xi_0 < \xi_1 < \infty$. Покажем, что имеет место оценка

$$\inf_{\xi_0 \leq x \leq \xi_1} h_\delta(x) \geq \gamma > 0. \quad (2.2.10)$$

Если $h_\delta(x) < 1$ ($x \in [\xi_0, \xi_1]$), то в силу (2.2.5)

$$h_\delta(x) \geq \left[\int_{\xi_0}^{\xi_1+1} \rho^{2\nu} d\xi \right]^{-\frac{1}{2}} = b > 0.$$

Возьмем $\gamma = \min\{1, b\}$. Из (2.2.10) следует, что $[\xi_0, \xi_1] \subset \bigcup_{j=1}^N \Delta(x_j)$ ($N < \infty$), где $x_1 = \xi_0$, $x_{j+1} = x_j + h_{(\delta)}(x_j)$, $\Delta(x_j) = [x_j, x_{j+1})$. Обращаясь к оценкам (2.2.7) и (2.2.8), выводим

$$\|y; L_2(I)\| \leq \left(\sum_{j=1}^N \int_{\Delta(x_j)} |y|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \leq c(\delta) \|y; W_{2,(\mu,\nu)}^2(I)\|.$$

Лемма 2.3. Справедливы утверждения:

а)

$$0 < \tilde{h}(x, \lambda) = \sup\{h > 0; K_{(\delta)}(x, h; \rho_0) \leq \lambda\} < \infty \quad (x \geq 0),$$

$$\tilde{h}(x, \lambda) < h_{(\delta)}(x), \quad \text{если} \quad K_{(\delta)}(x) > \lambda, \quad (2.2.11)$$

$$K_{(\delta)}(x, \tilde{h}(x, \lambda); \rho_0) = \lambda. \quad (2.2.12)$$

б) на каждом $\tilde{\Delta} = \tilde{\Delta}(x; \lambda) = [x, x + \tilde{h}(x, \lambda)]$ считающая функция

$$\mathcal{N}(\lambda; BW(\tilde{\Delta}), L_2(\tilde{\Delta})) \leq 1. \quad (2.2.13)$$

Доказательство. а) Оценки $0 < \tilde{h}(x, \lambda) < \infty$ следуют из предельных равенств

$$\lim_{h \rightarrow 0+} K_{(\delta)}(x, h; \rho_0) = 0, \quad \lim_{h \rightarrow \infty} K_{(\delta)}(x, h; \rho_0) = \infty.$$

Утверждение (2.2.11) тривиально следует из строго монотонного возрастания $K_{(\delta)}(x, h; \rho_0)$ по h . Равенство (2.2.12) по сути доказывается как равенство (2.2.5).

б) пусть $U_x y(t) = y(x) + y'(x)(t - x)$, $y \in W(\tilde{\Delta})$. Оператор $U_x \in \mathfrak{U}_2(BW(\tilde{\Delta}), L_2(\tilde{\Delta}))$, т.к. $\dim U_x \leq 2$ и норма

$$\|U_x y\|_{L_2(\tilde{\Delta})} \leq \left(|\tilde{\Delta}|^{\frac{1}{2}} + |\tilde{\Delta}|^{\frac{3}{2}} \right) (|y(x)| + |y'(x)|) = b_x < \infty.$$

По формуле Тейлора с интегральным остатком

$$\begin{aligned} \|y - U_x y\|_{L_2(\tilde{\Delta})} &= \left[\int_{\tilde{\Delta}} \left| \int_x^t (t - \xi) y''(\xi) d\xi \right|^2 dt \right]^{1/2} \leq \\ &\leq (\tilde{h}(x, \lambda))^{\frac{3}{2}} \left[\int_{\tilde{\Delta}} \rho_0^{-2\mu} d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\tilde{\Delta}} |\rho_0^\mu y''|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \leq K_{(\delta)}(x, \tilde{h}(x, \lambda); \rho_0) = \lambda. \end{aligned}$$

Следовательно, $\lambda_k(BW(\tilde{\Delta}), L_2(\tilde{\Delta})) \leq \lambda$ при $k \geq 2$ и имеет место оценка (2.2.13).

Лемма 2.4. Пусть $K_{(\delta)}(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Пусть $x_j = x_{j-1} + |\Delta_{j-1}|$, ($j = 1, 2, \dots$), $x_1 = 0$,

$$\Delta_j = \begin{cases} [x_j, x_j + h_{(\delta)}(x_j)], & \text{если } K_{(\delta)}(x_j) \leq \lambda, \\ [x_j, x_j + \tilde{h}(x_j, \lambda)], & \text{если } K_{(\delta)}(x_j) > \lambda. \end{cases}$$

Имеют место оценки

$$\mathcal{N}(2c\lambda; BW(I), L_2(I)) \leq \sum_{j: K_{(\delta)}(x_j) > \lambda} \mathcal{N}(\lambda; BW(\Delta_j), L_2(\Delta_j)),$$

где $c = c(\delta)$ постоянная в лемме 2.1.

Доказательство. Пусть $K_{(\delta)}(x_j) \leq \lambda$. В силу (2.2.7) (при $\rho = \rho_0^{2\mu}$, $v = \rho_0^{2\nu}$)

$$n_j = \mathcal{N}(c\lambda; BW(\Delta_j), L_2(\Delta_j)) = 0.$$

Пусть $\Lambda = \{j \in \mathbb{N}: K_{(\delta)}(x_j) > \lambda\}$. Так как $K_{(\delta)}(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, то $\Lambda \subset \{1, 2, \dots, m\}$, где $m \in \mathbb{N}$ достаточно большое. Если $n_j > 0$ ($j \in \Lambda$), то при всех $n \geq n_j$

$$\inf_{U \in \mathfrak{U}_n(BW(\Delta_j), L_2(\Delta_j))} \sup_{y \in BW(\Delta_j)} \|y - Uy\|_{L_2(\Delta_j)} \leq c\lambda.$$

Поэтому для произвольно малого $\eta > 0$ найдется оператор $U_j \in \mathfrak{U}_{n_j}(BW(\Delta_j), L_2(\Delta_j))$, для которого

$$\sup_{y \in BW(\Delta_j)} \|y - U_j y\|_{L(\Delta_j)} \leq (1 + \eta)c\lambda. \quad (2.2.15)$$

Пусть χ_j - характеристическая функция промежутка $[x_j, x_j + \tilde{h}(x_j, \lambda))$, $\Lambda_+ = \{j \in \Lambda: n_j > 0\}$. Оператор

$$Uy = \sum_{j \in \Lambda_+} \chi_j U_j(\chi_j y), y \in L_2(I),$$

имеет конечную размерность $\dim U \leq \sum_{j \in \Lambda_+} n_j$. При этом для любого $y \in BW$ из леммы 2.1 и (2.2.15) следует:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |y - Uy|^2 dx &= \sum_{j \in \Lambda_+} \int_{\Delta_j} |\chi_j y - U_j(\chi_j y)|^2 dx + \sum_{j \notin \Lambda_+} \int_{\Delta_j} |y|^2 dx \leq \\ &\leq \sum_{j \in \Lambda_+} \|y\|_{W(\Delta_j)}^2 \sup_{\tilde{y} \in BW(\Delta_j)} \|\tilde{y} - U_j \tilde{y}\|_{L_2(\Delta_j)}^2 + \sum_{j \notin \Lambda_+} c\lambda \|y\|_{W(\Delta_j)}^2 \leq \\ &\leq \sum_{j \in \Lambda_+} ((1 + \eta)c\lambda)^2 \|y; W(\Delta_j)\|^2 + \sum_{j \notin \Lambda_+} (c\lambda)^2 \|y; W(\Delta_j)\|^2 \leq \\ &\leq ((2 + \eta)c\lambda)^2 \|y\|_W^2 \leq ((2 + \eta)c\lambda)^2 \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

Предельный переход в (2.2.16) при $n \rightarrow \infty$ приводит к следующим оценкам:

$$\|y - Uy; L_2(I)\| \leq 2c\lambda, y \in BW, \quad \lambda_n(BW, L_2(I)) \leq 2c\lambda, \text{ если } n \geq \sum_{j \in \Lambda_+} n_j,$$

$$\mathcal{N}(2c\lambda; BW, L_2(I)) \leq \sum_{j \in \Lambda_+} n_j \leq \sum_{j \in \Lambda_+} \mathcal{N}(\lambda; BW(\Delta_j), L_2(\Delta)) \quad (\text{т.к. } c > 1).$$

Доказательство теоремы 2.3. Из леммы 2.3 и (2.2.12), (2.2.13) следует, что

$$N(2c\lambda; BW, L_2(I)) \leq \lambda^{-\frac{1}{2}} \sum_{j \in \Lambda} [K(x_j, h_j; \rho_0)]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.2.17)$$

где берем $c = c\left(\frac{\delta}{2}\right)$, $\Lambda = \{j \in \mathbb{N}: K_{(\delta/2)}(x_j) > \lambda\}$, $\tilde{h}_j = \tilde{h}(x_j, \lambda)$ и $\Delta_j = [x_j; x_j + h_j)$, $\Delta'_j = [x_j; x_j + h_j/2)$ ($j \in \Lambda$) не пересекаются. Поскольку $\Delta_j \in B_{t,(\delta/2)}$ для всех $t \in \Delta'_j$, то:

$$h_j^{-1} \int_{\Delta_j} \rho_0^{-2\mu} d\xi \leq M_{\left(\frac{\delta}{2}\right)}^* \rho_0^{-2\mu}(t), t \in \Delta'_j. \quad (2.2.18)$$

Поэтому

$$\left(K(x_j, h_j; \rho_0)\right)^{\frac{1}{2}} = h_j \left(\frac{1}{|\Delta_j|} \int_{\Delta_j} \rho_0^{-2\mu} d\xi\right)^{1/4} \leq 2 \int_{\Delta'_j} \left(M_{\left(\frac{\delta}{2}\right)}^* \rho_0^{-2\mu}\right)^{\frac{1}{4}} d\xi.$$

В силу (2.2.17) и вложения $BV \subset BW$

$$\mathcal{N}(2c\lambda; BV, L_2(I)) \leq 2\lambda^{-\frac{1}{2}} \sum_{j \in \Lambda} \int_{\Delta'_j} \left(M_{\left(\frac{\delta}{2}\right)}^* \rho_0^{-2\mu}\right)^{\frac{1}{4}} d\xi. \quad (2.2.19)$$

Покажем, что

$$\Delta'_j \subset G\left(\frac{\lambda}{2}\right), j \in \Lambda. \quad (2.2.20)$$

Пусть $\Delta = [x, x + h)$ ($h > 0$), $E_\delta(\Delta) = \{e: e = \bar{e} \subset [x, x + h] \text{ и } |e| \leq \delta h\}$.
При $0 < \delta < 1/2$

$$E_\delta(\Delta) \subset E_{2\delta}(\Delta), \quad (2.2.21)$$

и для $t \in [x, x + \frac{h}{2}]$, $\Delta_t = [t, t + h/2)$

$$\left\{e_t = e \cap \left[t, t + \frac{h}{2}\right], \quad e \in E_\delta(\Delta)\right\} \subset E_{2\delta}(\Delta_t). \quad (2.2.22)$$

Утверждения (2.2.21) и (2.2.22) позволяют (с помощью простых рассуждений) показать, что:

$$h_{(\delta)}(x) \geq h_{\left(\frac{\delta}{2}\right)}(x), \quad M_{(\delta)}^* f(x) \geq M_{(\delta/2)}^* f(x). \quad (2.2.23)$$

Оценка

$$h_{(\delta)}(t) \geq \frac{1}{2} h_{\left(\frac{\delta}{2}\right)}(x), \text{ если } t \in \left[x, x + \frac{h}{2}\right], h = h_{\left(\frac{\delta}{2}\right)}(x), \quad (2.2.24)$$

следует из неравенств

$$\begin{aligned} 1 &= h \left[\int_{\Delta} \rho_0^{-2\mu} d\xi \cdot \inf_{e \in E_{\delta/2}(\Delta)} \int_{\Delta \setminus e} \rho_0^{2\nu} d\xi \right]^{1/2} \geq \\ &\geq \frac{h}{2} \left[\int_x^{x+\frac{h}{2}} \rho_0^{-2\mu} d\xi \cdot \inf_{e \in E_{\frac{\delta}{2}}(\Delta)} \left\{ \int_{[t, t+\frac{h}{2}] \setminus e_t} \rho_0^{2\nu} d\xi, e_t = e \cap \left[t, t + \frac{h}{2}\right] \right\} \right]^{\frac{1}{2}} \geq \\ &\geq M_{(\delta)} \left(t, \frac{h}{2}; \rho^{2\mu}, \rho^{2\nu} \right). \end{aligned}$$

Теперь из (2.2.18), (2.2.23)-(2.2.24) выводим, что для всех $t \in \Delta'_j$

$$(h_{\delta}(t))^2 (M_{(\delta)}^* \rho_0^{-2\mu}(t))^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{4} h_j^2 \left(h_j^{-1} \int_{\Delta_j} \rho_0^{-2\mu} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \lambda.$$

Поскольку $F \subset aBV \subset aBW$, $a = c_{\mu, \nu}$, то в силу (2.2.19) и (2.2.25)

$$\mathcal{N}(\lambda; F, L_2(I)) \leq 2 \left(\frac{ac}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{G\left(\frac{\lambda}{ac}\right)} (M_{(\delta)}^* \rho_0^{-2\mu})^{\frac{1}{4}} d\xi.$$

Пример 4. Рассмотрим уравнение

$$Ty \equiv -(3+x)^{\mu} y'' + q_1(x) y' + (q_0(x) + (3+x)^{2\nu}) y = f \quad (2.2.26)$$

при следующих условиях: $q_0, q_1 \in C^{\infty}(I)$ удовлетворяют условиям iii) относительно $\rho_0(x) = 3+x$, и

$$\begin{aligned} \sup_{x \geq 0} |q_0(x)| (3+x)^{-\nu} = \beta_0 \leq \frac{3}{4}, \quad \sup_{x \geq 0} |q_1(x)| (3+x)^{\frac{\nu+\mu}{2}} = \beta_1 < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} < \mu < 2 < \nu - \mu. \end{aligned}$$

Тогда $\beta_1 < \frac{3}{5}$ и в силу теоремы 2.2 для оператора T в (2.2.26) существует T^{-1} с нормой

$$\|T^{-1}\| \leq ((1 - \beta_0)(1 - \beta_1))^{-1} < 4 \cdot \frac{5}{2} = 10.$$

Следовательно, множество решений уравнения (2.2.26) с правой частью $f \in L_2(I)$ содержится в шаре $10BV$.

Доказательство. Пусть $c_\mu = 2 \cdot 3^{\mu/2}$, $u = 2c_\mu \sqrt{10\lambda^{-1}}$. В силу теоремы 2.2

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(c\lambda; 10BV, L_2(I)) &= \mathcal{N}(10^{-1}c\lambda; BV; L_2(I)) \leq \\ &\leq c_\mu (10^{-1}\lambda)^{-1/2} \int_{G(10^{-1}\lambda)} (\beta + x)^{-\mu/2} dx \leq c_\mu (10^{-1}\lambda)^{-1/2} \int_0^u x^{-\mu/2} dx = \\ &= \frac{1}{2 - \mu} (3^\mu + 6(10^{-1}\lambda)^{-1})^{(v-\mu+2)/2v}. \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

Пусть $c\lambda = \lambda_n(10BV, L_2(I))$. В силу (2.2.27) для любого решения y уравнения (2.2.26) с $f \in BL_2(I)$

$$\inf_{U \in \mathcal{U}_n(L_2(I))} \|y - Uy\|_{L_2(I)} \leq \lambda_n(10BV; L_2(I)) \leq bn^{-2\left(1 - \frac{2-\mu}{2-\mu+v}\right)},$$

где $b = 160c3^\mu \left(\frac{1}{2-\mu}\right)^{27/(242-\mu)}$.

3 О ВЕСОВЫХ ОЦЕНКАХ ДЛЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ОСИ В ПРОСТРАНСТВАХ МУЛЬТИПЛИКАТОРОВ

Пусть X, Y, V - нормированные пространства функций $y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, Ω - промежуток в $\mathbb{R}$. В разделе 3 получены оценки вида

$$\|y\|_V \leq C(\|Qy\|_Y + \|y\|_X) \quad (3.0.1)$$

для решений уравнения

$$Qy = f, \quad f \in Y, \quad (3.0.2)$$

где Q – (обыкновенный) дифференциальный оператор в X , с коэффициентами из класса $L_{p,loc}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

Оценку вида (3.0.1) называют коэрцитивной оценкой. Коэрцитивные оценки раскрывают те или иные функциональные характеристики решений дифференциального уравнения (3.0.2).

В п. 3.1 мы исследуем оператор

$$Ly = -a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y$$

в пространствах (точечных) мультипликаторов $M(X \rightarrow Y)$, где X - весовое пространство Соболева, Y - пространство Лебега на оси I .

В п. 3.2 раздела получены коэрцитивные оценки для оператора Штурма-Лиувилля

$$Ly = -y'' + q(x)y$$

в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$ и в пространствах мультипликаторов на паре (W_2^m, L_2) .

3.1 О коэрцитивных оценках для обыкновенных дифференциальных операторов на полуоси

В этом разделе продолжены исследования замкнутого и обратимого оператора

$$Ly = -a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y, D(L) \subset L_2(I),$$

рассмотренного в п. 1.2. Получена коэрцитивная оценка для решений уравнения

$$Ly = f, f \in L_2(I)$$

в пространствах мультипликаторов.

Определение. [44, с. 4-400] Пусть X, Y – нормированные пространства функций $y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ($\Omega \subset \mathbb{R}$). Функцию $z: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ называют (точечным) мультипликатором из X в Y , если $zy \in Y$ для всех $y \in X$.

Через $M(X \rightarrow Y)$ будем обозначать класс всех мультипликаторов из X в Y , для которых оператор умножения $U_z y = zy$ ограничен как оператор из X в Y . В линейное пространство $M(X \rightarrow Y)$ вводится норма оператора

$$\|z; X \rightarrow Y\| = \|U_z; X \rightarrow Y\| = \sup_{0 \neq y \in X} \frac{\|zy\|_Y}{\|y\|_X}.$$

См. [40, с. 4-530; 41, с. 4-660].

Обоснуем постановку задачи о коэрцитивных неравенствах в пространствах мультипликаторов. В [44, с. 4-400] было получено коэрцитивное неравенство ($m > l \geq k \geq 0$):

$$\|u\|_{M(W_p^m \rightarrow W_p^l)} \leq c \left(\|Pu\|_{M(W_p^m \rightarrow W_p^{l-k})} + \|u\|_{M(W_p^{m-l} \rightarrow L_p)} \right), \quad (3.1.2)$$

для оператора $Pu = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha D^\alpha u$ с постоянными коэффициентами c_α , действующего из пространства

$$D(P) = X \cap W_{p,loc}^l \subset X = M(W_p^{m-l} \rightarrow L_p) \text{ в } Y = M(W_p^m \rightarrow W_p^{l-k}).$$

Понятие разделимости (коэрцитивных неравенств) для дифференциальных операторов было введено в работах [1, р. 308-325; 46, р. 301-323]. В дальнейшем появились работы, в которых понятие разделимости (коэрцитивного неравенства) было расширено. См. к примеру [26, р. 271-229; 47, с. 3-88]. Так в [47, с. 3-88] дано понятие V -коэрцитивного неравенства

$$Re(Au, u)_H \geq C \|u\|_V^2$$

для ограниченного оператора $A: V \rightarrow V''$. Здесь V, H – гильбертовы пространства с условием плотного вложения $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V''$, $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в H .

Пусть $w(\cdot)$ – весовая функция в I , $V_p^m(\Omega; w)$ – пополнение класса $C_0^\infty(I)$ по норме

$$\|y\|_{V_p^m(\Omega; w)} = \sum_{r=0}^m \|wy^{(r)}\|_{L_2(\Omega)}.$$

При $w = 1$ $V_p^m(\Omega; w) = V_p^m$. Положим $K = K(h(\cdot); a_2)$, $N = N(h(\cdot); a_2, a_1)$.

Теорема 3.1. Пусть выполнены условия теоремы 1.2, a_2 возрастает и существует такое $\beta > 1$, что

$$a_2(k+1) \leq \beta a_2(k) \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Тогда имеет место импликация

$$Lz \in M(V_2^3(a_2) \rightarrow L_2(I)) \Rightarrow z \in M(V_2^3(a_2) \rightarrow L_2(I)). \quad (3.1.3)$$

Норма

$$\begin{aligned} \|z\|_{M(V_2^3(a_2) \rightarrow L_2(I))} &\leq \|Lz\|_{M(V_2^3(a_2) \rightarrow L_2(I))} + \\ &+ c(\beta, \eta)(1+N)(\|a_2^{-1}\|_{L_2(I)} + K)\|z\|_{W_2^2(a_2, a_0)}. \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Следствие. Если к тому же выполнены условия теоремы 1.3, то оператор L имеет обратимое сужение $\tilde{L}$, а именно

$$\tilde{L}^{-1}: M(V_2^3(a_2) \rightarrow L_2(I)) \rightarrow D(L) \cap M(V_2^3(a_2) \rightarrow L_2(I)).$$

Пример 5. Пусть $a_2 > 0$ имеет непрерывную производную $a_2' > 0$, и пусть:

i) $a_0(x) = (1+x)^m \leq \beta_1 a_2(x)$, $x \geq 0$ ($m \in \mathbb{N}$, $\beta_1 > 1$);

ii) $\sup_{x \leq t \leq x+1} a_2'(t) \leq c a_2(x)$ ($x \geq 0$);

iii) функции $a_2^{-1}, a_1 \in L_2(I)$.

Тогда: 1. $a_0^2 - (\mathfrak{R})$ -регулярна относительно ф.д. $h(x) = h^\#(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{h > 0: M(x, h(x); a_2^2, a_0^2) \leq 1\}$, а именно

$$S(x, h(x); a_0^2) \geq \eta \frac{1}{h(x)} \int_x^{x+h(x)} (1+t)^{2m} dt, \quad (3.1.5)$$

где $\eta = \frac{\tau^2}{2}$, $\tau = \tau\left(\frac{1}{2}\right) > 0$.

2. Пара (a_2^2, a_0^2) допустима относительно ф.д. $h(x) = h^\#(x; a_2^2, a_0^2)$, т.к.

$$M(x, h^\#(x); a_2^2, a_0^2) = 1. \quad (3.1.6)$$

см. утв.1.1.

3. $a_2(x+1) = a_2(x) \left(\frac{a_2(x+1) - a_2(x)}{a_2(x)} + 1 \right) \leq a_2(x) \left(\frac{a_2'(\xi)}{a_2(x)} + 1 \right) \leq \beta_1 a_2(x)$, где $\beta_1 = 1 + c$.

4. Из условия (iii) следует, что

$$N \leq \frac{1}{2} (\|a_2^{-1}\|_{L_2(I)}^2 + \|a_1\|_{L_2(I)}^2) < \infty.$$

5. Из равенства (3.1.6) и оценок (3.1.5) следует:

$$S(x, h(x); a_0^2) \leq \frac{1}{h(x)} \int_{\Delta(x)} a_0^2 dt \leq \eta^{-1} S(x, h(x); a_0^2),$$

$$\frac{1}{h(x)} \leq \left(\int_{\Delta(x)} a_0^2 dt \int_{\Delta(x)} a_2^{-2} dt \right)^{\frac{1}{2}} = \mathcal{K}_1(x, h(x); a_2^2, a_0^2) \leq \eta^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{h(x)}.$$

Поэтому

$$\mathcal{K}_0(x, h(x); a_2^2, a_0^2) \leq \eta^{-\frac{1}{2}}, \quad \mathcal{K}_1(x, h(x); a_2^2, a_0^2) \leq \eta^{-\frac{1}{2}}, \text{ если } h(x) > 1.$$

В случае $h(x) \leq 1$:

$$\mathcal{K}_1(x, h(x); a_2^2, a_0^2) \leq \left[\int_x^{x+1} a_2^{-2} dt \cdot \int_x^{x+1} (1+t)^{2m} dt \right]^{\frac{1}{2}} \leq 2^m \frac{(1+x)^m}{a_2(x)} \leq 2^m \sqrt{\beta_1}.$$

Поэтому

$$K = \sup_{x \geq 0} \left\{ \max_{r=0,1} \mathcal{K}_r(x, h(x); a_2^2, a_0^2) \right\} \leq \max \left\{ \eta^{-\frac{1}{2}}, 2^m \mathcal{N}_0^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Доказательство теоремы 3.1. Приведем в начале необходимые для доказательства утверждения и оценки на промежутках $\Delta = [x, x+h), h > 0$.

Теорема А ([44, с. 4-400], п. 1.3.3) Пусть $m \in N, 1 < p < \infty, mp > q$. Тогда

$$\| \phi \|_{M(W_p^m \rightarrow L_p)} \leq C \sup_x \left(\int_x^{x+1} |\phi|^p \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Теорема В ([58], VI.3.1) Пусть $m \in N, 1 < p < \infty$. С любого единичного интервала $\Delta \subset \mathbb{R}$ существует ограниченный линейный оператор продолжения $Q: W_p^m(\Delta) \rightarrow W_p^m(\mathbb{R})$ такой, что

$$\| Q; W_p^k(\Delta) \rightarrow W_p^k(\mathbb{R}) \| \leq C(k, p) \quad (0 \leq k \leq m).$$

Пусть $0 \leq k < m$ - целые, $1 \leq p < \infty$. Тогда для всех $y \in W_p^m(\Delta)$, имеет место оценка

$$\sup_{\Delta} |y^{(k)}| \leq C_k^* h^{m-k-\frac{1}{p}} \left[\int_{\Delta} (|y^{(m)}|^p + h^{-mp} |y|^p) dt \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Постоянная $C_k^* = C_k^*(p, m, k)$.

Напомним лемму 1.1. Пусть выполнены условия i) $M(x, h; \rho, v) \geq 1$, ii) существует такое η , $0 < \eta < 1$, что $S(x, h; v) \geq \eta \frac{1}{h} \int_x^{x+h} v dt$. Тогда для всех $f \in W_2^2(\Delta; \rho, v)$, где $\Delta = (x, x + h)$, справедлива оценка

$$\left(\int_{\Delta} |f^{(r)}|^2 w(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq c_r \mathcal{K}_r(x, h; \rho, w) \left[\int_{\Delta} (\rho(t) |f''|^2 + v(t) |f|^2) dt \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.1.8)$$

где $c_r = c(r, \eta)$, $r = 0, 1$. В случае $w = 1$ $\mathcal{K}_r(x, h; \rho, 1) = h^{\frac{3}{2}-r} \left(\int_x^{x+h} \frac{1}{\rho} dt \right)^{1/2}$.

Пусть $y \in C_0^\infty(I)$, $z \in D(L)$ и $Lz \in M(V_2^3(I) \rightarrow L_2(I))$. В силу теоремы 1.1.

$$\|yz\|_{L_2(I)} \leq c_1 K(\|a_2(yz)''\|_{L_2(I)} + \|a_0(yz)\|_{L_2(I)}). \quad (3.1.9)$$

Заметим, что

$$a_2(x)(yz)'' = -yLz + a_2(x)(y'z)' + a_2(x)y'z' + a_1(x)yz' + a_0(x)yz. \quad (3.1.10)$$

Проведем оценки норм слагаемых. Введем обозначения. Пусть $z_k = Q_k(z)$, $y_k = Q_k(y)$, где $Q_x: V_2^m(G_x) \rightarrow V_2^m(\mathbb{R})$ - оператор продолжения по Стейну ($m = 1, 2, 3$) с интервала $G_x = (x, x + 1)$, на все $\mathbb{R}$ ($k = 0, 1, \dots$). Норма $\|Q_x\| \leq c_1$ (c_1 не зависит от x , см. теорему В).

Теперь выводим:

$$\begin{aligned} \|a_2(y'z)'\|_{L_2(I)}^2 &\leq \sum_{k=0}^{\infty} a_2^2(k+1) (\|(z_k y'_k)'\|_{L_2(I)}^2 + \|z_k y'_k\|_{L_2(I)}^2) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_2^2(k+1) \|z_k y'_k\|_{W_2^1}^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \|z_k\|_{M(W_2^2 \rightarrow W_2^1)} a_2(k+1) \|y'_k\|_{W_2^2} \right\}^2 \leq \\ &\leq \sum_{k \geq 0} \left\{ \|z_k\|_{M(W_2^2 \rightarrow W_2^1)} a_2(k+1) \|y_k\|_{V_2^3} \right\}^2. \end{aligned}$$

Так как $a_2(k+1) \leq \beta a_2(k) \leq \beta a_2(x)$, для всех $x \in [k, k+1]$, то

$$\|a_2(y'z)'\|_{L_2(I)}^2 \leq 2(c_1 \beta)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \|z_k; M(W_2^2 \rightarrow W_2^1)\|^2 \times$$

$$\times \left(\int_k^{k+1} |a_2(x)y^{(3)}|^2 dx + \int_k^{k+1} |a_2(x)y'|^2 dx \right). \quad (3.1.11)$$

В силу теоремы А

$$\begin{aligned} \|z_k; M(W_2^2 \rightarrow W_2^1)\| &\leq c_2 \sup_{x \in \mathbb{R}} \|z_k; W_2^1(G_x)\| \leq c_2 \|z_k; W_2^1\| \leq \\ &\leq c_2 c_1 \left[\left(\int_k^{k+1} |z'|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_k^{k+1} |z|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

В силу (3.1.11), (3.1.12)

$$\|a_2(y'z)'\|_{L_2(I)}^2 \leq 2c_1^2 c_2 \beta \|y\|_{V_2^3(a_2)} \left[\int_0^\infty |z'|^2 dx + \int_0^\infty |z|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.1.13)$$

Положим $x_1 = 0$, $x_{j+1} = x_j + h(x_j)$ ($j = 1, 2, \dots$). Из (3.1.8) следует:

$$\begin{aligned} \left[\int_0^\infty |z'|^2 dt + \int_0^\infty |z|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} &= \left[\sum_{j=1}^\infty \int_{\Delta(x_j)} |z'|^2 dt + \sum_{j=1}^\infty \int_{\Delta(x_j)} |z|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq c(\eta) \left(\sup_{x \geq 0} h(x) \int_{\Delta(x)} a_2^{-2} dt + \sup_{x \geq 0} h^3(x) \int_{\Delta(x)} a_2^{-2} dt \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left[\sum_{j=1}^\infty \int_{\Delta(x_j)} (|a_2 z''|^2 + |a_0 z|^2) dx \right]^{\frac{1}{2}} \leq c(\eta) K \|z\|_W, \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

где $\|z\|_W = \|z; W_2^2(a_2, a_0)\|$.

Из (3.1.13), (3.1.14) следует:

$$\|a_2(y'z)'\|_{L_2(I)} \leq c_3 K \|z\|_W \|y\|_{V_2^3(a_2)}, \quad (3.1.15)$$

где $c_3 = c_1 c(\eta) \sqrt{2c_2 \beta}$. Далее в силу (3.1.7):

$$\|a_2 y' z'\|_{L_2(I)} \leq \left\{ \sum_{k=0}^\infty \left(\sup_{(k, k+1)} |z'| \right)^2 \int_k^{k+1} |a_2 y'|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq c_1^* \|y\|_{V_2^3(a_2)} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_k^{k+1} (|z''| + |z|) dx \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq \sqrt{2} c_1^* \|y\|_{V_2^3(a_2)} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} a_2^{-2} \int_k^{k+1} |a_2 z''|^2 dx + \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} |z|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq \sqrt{2} c_1^* \|y\|_{V_2^3(a_2)} \left(\|a_2^{-1}\|_{L_2(I)} \|a_2 z''\|_{L_2(I)} + \left(\int_0^{\infty} |z|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right). \quad (3.1.16)
\end{aligned}$$

В силу (3.1.7)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} |z|^2 dx &\leq \sum_{j=1}^{\infty} c(\eta)^2 \left(h^3(x_j) \int_{\Delta(x_j)} a_2^{-2} dt \right)^2 \int_{\Delta(x_j)} (|a_2 z''|^2 + |a_0 z|^2) dx \leq \\
&\leq c(\eta)^2 \sup_{x \geq 0} \left[h^3(x) \int_{\Delta(x)} a_2^{-2} dt \right] \|z\|_W^2. \quad (3.1.17)
\end{aligned}$$

Из (183) и (184) выводим, что

$$\|a_2 y' z'\|_{L_2(I)} \leq \sqrt{2} c_0^* (\|a_2^{-1}\|_{L_2(I)} + c(\eta)K) \|y\|_{V_2^3(a_2)} \|z\|_W. \quad (3.1.18)$$

Для оценки нормы $\|a_1 y z'\|_{L_2(I)}$ возьмем в (3.1.7) $w(x) = a_1^2(x)$. По аналогии выводим:

$$\begin{aligned}
\|a_1 y z'\|_{L_2(I)} &\leq \left\{ \sum_{k \geq 0} \left(\sup_{[k, k+1)} |y| \right)^2 \int_k^{k+1} |a_1 z'|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sup_{[k, k+1)} |y| \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} |a_1 z'|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq c_0^* \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_k^{k+1} (|y'| + |y|) dt \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ \sum_{j \geq 1} \left(c(\eta) \int_{\Delta_j} a_2^{-2} dt \cdot \int_{\Delta_j} a_1^2 dt \cdot \int_{\Delta_j} (|a_2 y''|^2 + |a_0 y|^2) dt \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \leq c_0^* c(\eta) N \|a_2^{-1}\|_{L_2(I)} \|y\|_{V_2^3(a_2)} \|z\|_W. \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

В свою очередь

$$\begin{aligned} \|a_0 y z\|_{L_2(I)} & \leq \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sup_{[k, k+1)} |y| \right)^2 \int_k^{k+1} |a_0 z|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \leq \sqrt{2} c_0^* \|a_0 z\|_{L_2(I)} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} a_2^{-2} dx \left(\int_k^{k+1} |a_2 y'|^2 dx + \int_k^{k+1} |a_2 y|^2 dx \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \leq \sqrt{2} c_0^* \|z\|_W \|a_2^{-1}\|_{L_2(I)} \|y\|_{V_2^3(a_2)}. \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

Собирая оценки (3.1.15), (3.1.18)-(3.1.20), выводим:

$$\begin{aligned} \|y z\|_{L_2(I)} & \leq c K \|y z\|_W \leq \\ & \leq c K (\|y L z\|_{L_2(I)} + \|a_2 (y' z)'\|_{L_2(I)} + \|a_2 y' z'\|_{L_2(I)} + \|a_1 y z'\|_{L_2(I)} + 2 \|a_0 y z\|_{L_2(I)}) \leq \\ & \leq \|L z\|_{M(V_2^3(a_2) \rightarrow L_2(I))} + c(\beta, \eta) (1 + \mathcal{N}) (\|a_2^{-1}\|_{L_2(I)} + K) \|z\|_W \|y\|_{V_2^3(a_2)}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

3.2 О разделимости оператора Штурма-Лиувилля

Мы рассматриваем в $L_2(I), I = (a, +\infty), a > -\infty$, оператор Штурма-Лиувилля

$$Ly \equiv l[y] = -y'' + q(t)y \quad (3.2.1)$$

с потенциалом $q \geq 1$ из $L_{2, \text{loc}}(I)$. Оператор L является одним из самосопряженных расширений в $L_2(I), I = (a, +\infty), a \geq -\infty$, минимального оператора.

$$L_0 y \equiv l[y], \quad D(L_0) = C_0^\infty(I).$$

Определение. [51, с. 4-280] Оператор L назовем разделимым, если имеет место оценка

$$\|y''\|_2 + \|qy\|_2 \leq C(\|Ly\|_2 + \|y\|_2) \quad (3.2.2)$$

для всех $y \in D(L)$, $c > 0$ не зависит от $y \in D(L)$. Из (3.2.2) следует, что $D(L) \subset W_{2,q}^2$, где $W_{2,q}^2$ есть пополнение класса $C_0^\infty(I)$ по норме

$$\|f; W_{2,q}^2\| = \|f''\|_{L_2(I)} + \|qf\|_{L_2(I)}.$$

Одна из теорем о разделимости оператора L на всей оси $\mathbb{R}$ была получена в [51, с. 4-280] в терминах сравнения «бегущей средней» Отелбаева $q^*(x)$ от функции q с нормой $\|q\|_{L_2(\tilde{\Delta}(x))}$ на симметричных характеристических отрезках $\tilde{\Delta}(x) = [x - cq^*(x)/2, x + cq^*(x)/2]$, где c - достаточно малая постоянная, величина которой обусловлена специальными требованиями. Нами получена теорема о разделимости оператора L на полуоси $I = [a, +\infty)$ в других терминах, существенно раздвигающих класс потенциалов $q(\cdot)$ в (3.2.1), при которых оператор L разделим.

Ниже всякую положительную и непрерывную справа функцию $h(\cdot)$ на $\bar{I} = [a, +\infty)$ будем называть функцией длины ($h(\cdot)$ ф.д на $\bar{I}$). Будем говорить, что $h(\cdot)$ есть регулярная функция длины на $\bar{I}$, если существует $b > 1$ такое, что

$$b^{-1}h(x) \leq h(t) \leq bh(x), \text{ если } t \in [x, x + h(x)], x \geq a.$$

Приведем важный пример ф.д на $\bar{I}$. Возьмем одну из «бегущих средних» Отелбаева для веса q равенством:

$$q^*(x) = \sup \left\{ h > 0; h \int_x^{x+h} q dt \leq 1 \right\}.$$

Функция q^* - конечная, положительная и непрерывная справа на $\bar{I}$ и такая, что на каждом отрезке $\Delta^*(x) = [x, x + q^*(x)]$

$$q^*(x) \int_{\Delta^*(x)} q(t) dt = 1.$$

Пусть C_0 - наилучшая постоянная в неравенстве вложения Соболева

$$\max_{0 \leq t \leq 1} |y(t)| \leq C_0 \left[\int_0^1 (|y''|^2 + |y|^2) dt \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 3.2. Пусть $q \geq 1$, $q \in L_2(\bar{I}, loc)$ и удовлетворяет условиям:

1. Существует такая регулярная функция длины $h(\cdot)$ на $\bar{I}$, что для всех $x \geq a$:

$$q^*(x) < A_0^{-1}h(x),$$

$$A_0 = 4\pi b^3 \left(\sqrt{2C_0(1+b^2)} + 2C_0^2\pi b^2\sqrt{1+b^4} \right). \quad (3.2.3)$$

2.

$$\sup_{\Delta(x)} q^* \left(\sup_{t \in \Delta(x)} q^*(t) \int_{\Delta^*(t)} q^2 \right)^{1/2} \leq C_q < \infty. \quad (3.2.4)$$

Тогда оператор L в (3.2.1) разделим.

Доказательство теоремы 3.2 проводится методом локализации, предложенным М. Отелбаевым в [51, с. 4-280], и опирается на следующие утверждения.

Лемма 3.2 [51, с. 4-280] Оператор L разделим тогда и только тогда, когда $\|q L^{-1}: L_2(I) \rightarrow L_2(I)\| < \infty$.

Лемма 3.3 [51, с. 4-280] Пусть для веса v на $\Delta = [x, x+h]$ выполнено условие $h \int_{\Delta} q \geq 1$. Тогда для всех $y \in W_2^1(\Delta)$ имеет место оценка

$$h^{-2} \int_{\Delta} |y|^2 dt \leq 4 \int_{\Delta} (|y'|^2 + q(t)|y|^2) dt. \quad (3.2.5)$$

Лемма 3.3 доказывается по существу с помощью рассуждений, аналогичных доказательству леммы 1.1. Следующие два неравенства вытекают из вложения $W_2^m(0,1) \hookrightarrow C^k[0,1]$, $0 \leq k < m$:

$$\max_{[x, x+h]} |y^{(k)}|^2 \leq C_k h^{2(m-k)-1} \int_x^{x+h} (|y^{(m)}|^2 + h^{-2m}|y|^2) dt, \quad (3.2.6)$$

$$\int_x^{x+h} |y^{(k)}|^2 dx \leq C_k h^{2(m-k)} \int_x^{x+h} (|y^{(m)}|^2 + h^{-2m}|y|^2) dt. \quad (3.2.7)$$

где C_k - наилучшие постоянные вложений $W_2^m(0,1) \hookrightarrow C^k[0,1]$.

Пусть $\dot{L}_{\Delta}$ - оператор Штурма-Лиувилля с $D(\dot{L}_{\Delta}) = \{y \in C^{\infty}(\bar{\Delta}), y(\Delta^{\pm}) = 0\}$, $\Delta = [\Delta^-, \Delta^+]$. Известно, что замыкание $\dot{L}_{\Delta}$ совпадает с оператором

$$L_{\Delta} y = l[y].$$

$$D(L_{\Delta}) = \{y \in W_2^1(\Delta), l[y] \in L_2(\Delta)\} = W_2^1(\Delta) \cap W_2^2(\Delta^-, \Delta^+).$$

Оператор L_{Δ} самосопряжен и имеет обратный L_{Δ}^{-1} с $D(L_{\Delta}) = L_2(\Delta)$.

Лемма 3.4. Пусть Δ - конечный промежуток в $\bar{I}$. Тогда:

а) оператор L_{Δ}^{-1} ограничен в $L_2(\Delta)$. Норма

$$\|L_{\Delta}^{-1}\| \leq 4C_0 \left(\sup_{\Delta} q^* \right)^2, C_0 = 3^{-1}(1 + \sqrt{3})^2. \quad (3.2.8)$$

б) оператор $\frac{d}{dx} L_{\Delta}^{-1}$ ограничен в $L_2(\Delta)$. При этом

$$\left\| \frac{d}{dx} L_{\Delta}^{-1} \right\| \leq 2\sqrt{C_0} \sup_{\Delta} q^*. \quad (3.2.9)$$

в) пусть $r(\cdot) \in L_2(\Delta)$. Оператор $r L_{\Delta}^{-1}$ ограничен в $L_2(\Delta)$. Норма

$$\|r L_{\Delta}^{-1}\| \leq 4C_0 \sup_{\Delta} q^* \left(\sup_{x \in \Delta} q^*(x) \int_{\Delta^*(x) \cap \Delta} |r|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 4C_0 S(\Delta). \quad (3.2.10)$$

Доказательство. Поскольку $y(\Delta^+) = 0$, то считаем $y(x) = 0$ для $x \geq \Delta^+$. Положим $K(\Delta) = \sup_{\Delta} q^*$.

а) пусть $\{\Delta_j^*, 1 \leq j\}$ - дезъюнктивное покрытие отрезка Δ промежутками $\Delta_j^* = [t_j, t_j + q^*(t_j))$, $t_1 = a$, $t_{j+1} = t_j + q^*(t_j)$. Возьмем $y = L_{\Delta}^{-1}f$, $f \in L_2(\Delta)$. Из оценок (3.2.6), (3.2.7) следует

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} |L_{\Delta}^{-1}f|^2 dx &= 4C_0 \sum_{j \geq 1} q^{*2}(x_j) \int_{\Delta_j^* \cap \Delta} (|y'|^2 + q(x)|y|^2) dx \leq \\ &\leq 4C_0 (K(\Delta))^2 (L_{\Delta}f, f) \leq 4C_0 (K(\Delta))^2 \|L_{\Delta}^{-1}f\| \|f\|_{L_2(\Delta)} \end{aligned}$$

откуда следует оценка (3.2.8).

б) оценка (3.2.9) следует из неравенства

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d}{dx} L_{\Delta}^{-1}f \right\|_{L_2(\Delta)} &= \int_{\Delta} |y'|^2 dx \leq \int_{\Delta} (|y'|^2 + q(x)|y|^2) dx \leq \\ &\leq \|f\|_{L_2(\Delta)} \|L_{\Delta}^{-1}f\|_{L_2(\Delta)} \leq 4C_0 (K(\Delta))^2 \|f\|_{L_2(\Delta)}^2. \end{aligned}$$

в) здесь мы применяем оценки из доказательств утверждений а), б):

$$\begin{aligned} \|r L_{\Delta}^{-1}f\|_{L_2(\Delta)}^2 &= \int_{\Delta} |ry|^2 dx \leq \sum_{j \geq 1} \left(\max_{\Delta_j^* \cap \Delta} |y| \right)^2 \int_{\Delta_j^* \cap \Delta} |y|^2 dx \leq \\ &\leq 4C_0 \sum_{j \geq 1} \left(q^*(t_j) \int_{\Delta_j^* \cap \Delta} |r|^2 dx \right) \int_{\Delta_j^* \cap \Delta} (|y'|^2 + q(x)|y|^2) dx \leq \end{aligned}$$

$$\leq \left(4C_0 \sup_{\Delta} q^*\right)^2 \left(\sup_{x \in \Delta} q^*(x) \int_{\Delta_j^*(x)} |r|^2 dt \right) \|f\|_{L_2(\Delta)}^2.$$

откуда следует (3.2.10). Возьмем $\tau \in (1 - \eta, 1), 0 < \eta < 1$. На $\bar{I}$ выстроим последовательности точек $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ и $\{\tilde{x}_j\}_{j=1}^{\infty}$, полагая

$$x_0 = a, x_1 = x_0 + h(x_0), \tilde{x}_1 = x_0 + \tau h(x_0) \text{ и т.д.}$$

$$x_{j+1} = \tilde{x}_j + h(\tilde{x}_j), \tilde{x}_{j+1} = \tilde{x}_j + \tau h(\tilde{x}_j).$$

Пусть $\Delta_j = [\tilde{x}_{j-1}, x_j], \tilde{\Delta}_j = [x_{j-1}, \tilde{x}_j]$. Возьмем далее

$$\theta(t) = \frac{1}{2} \pi \int_0^t \sin(\pi \xi) d\xi$$

и положим

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \theta\left(\frac{t - \tilde{x}_{j-1}}{x_{j-1} - \tilde{x}_{j-1}}\right), & \tilde{x}_{j-1} \leq t \leq x_{j-1} \\ 1, & x_{j-1} \leq t \leq \tilde{x}_j \\ \theta\left(\frac{x_j - t}{x_j - \tilde{x}_j}\right), & \tilde{x}_j \leq t \leq x_j \\ 0, & t \leq \tilde{x}_{j-1} \text{ либо } t \geq x_j. \end{cases}$$

Функции φ_j имеют в Δ_j непрерывную производную φ_j' и

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x) \chi_j(x) = 1, x \in \bar{I}, \quad (3.2.11)$$

где χ_j характеристическая функция отрезка Δ_j . Равенство (3.2.11) следует из тождества $\theta(t) + \theta(1 - t) \equiv 1 (0 \leq t \leq 1)$. Положим $L_j = L_{\Delta_j}$.

На пространстве $C_0^{\infty}(I)$ зададим операторы

$$\begin{aligned} \mathring{D}f &= \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j L_j^{-1}(\chi_j f) \\ \mathring{B}_1 f &= 2 \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j' \frac{d}{dx} L_j^{-1}(\chi_j f) \end{aligned}$$

$$\overset{\circ}{B}_2 f = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j'' dx L_j^{-1}(\chi_j f)$$

Лемма 3.5. Пусть $h(\cdot)$ регулярная функция длины на $\bar{I}$. Пусть

$$\mathcal{K}(x) = \sup_{t \in \Delta(x)} \frac{q^*(t)}{h(x)},$$

где $\Delta(x) = [x, x + h(x)]$. Допустим, что

$$K = \sup_{x \geq a} \mathcal{K}(x) < \infty.$$

Тогда справедливы утверждения: а) операторы $B_i (i = 1, 2)$ продолжаются до ограниченного оператора B_i в $L_2(I)$. При этом

$$\|B_1\| \leq \pi b^2 \sqrt{2^5 C_0 (1 + b^2)} K, \quad (3.2.12)$$

$$\|B_2\| \leq (\pi b^2)^2 \sqrt{2^7 C_0^2 (1 + b^4)} K^2. \quad (3.2.13)$$

б) пусть $r(\cdot) \in L_2(\Delta)$. Если

$$S(x) = \sup_{\Delta(x)} q^* \left(\sup_{t \in \Delta(x)} q^*(t) \int_{\Delta^*(t)} |r|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C < \infty \quad (x \geq a),$$

то оператор $r\overset{\circ}{D}$ продолжается до ограниченного оператора rD в $L_2(I)$. Норма

$$\|rD\| \leq C_0 \sqrt{32} \sup_{x \geq a} S(x) = C_0 \sqrt{32} S. \quad (3.2.14)$$

Доказательство: а) возьмем в $\tilde{x}_{j+1} = \tilde{x}_j + \tau h(\tilde{x}_j) \tau = 1 - (2b)^{-1}$. Нетрудно увидеть, что тогда

$$|\varphi_j'(x)| \leq \pi b h(\tilde{x}_{j-1})^{-1}, \quad |\varphi_j''(x)| \leq 2(\pi b)^2 h(\tilde{x}_{j-1})^{-2} \quad (x \in \Delta_j).$$

Далее мы будем привлекать оценки норм локальных операторов из леммы 3.4. Пусть $\tilde{\chi}_j$ - характеристическая функция отрезка $[\tilde{x}_{j-1}, \tilde{x}_j]$, $f_j = f \cdot \chi_j$, $f \in C_0^\infty(I)$. Имеем:

$$\begin{aligned}
\int_a^\infty |\mathring{B}_1 f|^2 dx &= 4 \sum_{j=1}^\infty \int_{\Delta_j} \left| \sum_{k=1}^\infty \varphi'_k \frac{d}{dx} L_k^{-1}(f_k) \right|^2 dx \leq \\
&\leq 8(\pi b)^2 \sum_{j=1}^\infty \left[h(x_{j-2})^{-2} \sum_{k=j-1}^j \int_{\Delta_{j-1} \cap \Delta_j} \left| \frac{d}{dx} L_k^{-1}(f_k) \right|^2 dx + \right. \\
&\quad \left. + h(\tilde{x}_{j-1})^{-2} \sum_{k=j}^{j+1} \int_{\Delta_j \cap \Delta_{j+1}} \left| \frac{d}{dx} L_k^{-1}(f_k) \right|^2 dx \right] \leq \\
&\leq 32C_0 \pi^2 b^4 (1 + b^2) \sum_{j=1}^\infty \left(\sup_{x \in \Delta_j} \frac{q^*(x)}{h(x)} \right)^2 \int_{\Delta_j} |f|^2 dx \leq \\
&\leq \left(\sqrt{32C_0(1 + b^2)} \pi b^2 K \right)^2 \|f\|_{L_2(I)}^2.
\end{aligned}$$

откуда следует оценка (160) для B_1 . Для оператора B_2

$$\begin{aligned}
\int_a^\infty |B_2 f|^2 dx &\leq 8(\pi b)^4 \left[h(\tilde{x}_{j-2})^{-4} \sum_{k=j-1}^j \int_{\Delta_{j-1} \cap \Delta_j} |L_k^{-1}(f_k)|^2 dx + \right. \\
&\quad \left. + h(\tilde{x}_{j-1})^{-4} \sum_{k=j}^{j+1} \int_{\Delta_j \cap \Delta_{j+1}} |L_k^{-1}(f_k)|^2 dx \right] \leq \\
&\leq 8(\pi b)^4 (4C_0)^2 b^4 (1 + b^4) \sum_{j=1}^\infty \left(\sup_{x \in \Delta_j} \frac{q^*(x)}{h(x)} \right)^4 \int_{\Delta_j} |f|^2 dx \leq \\
&\leq \left(\pi b^2 \sqrt{2^7 C_0^2 (1 + b^4)} K \right)^4 \int_a^\infty |f|^2 dx,
\end{aligned}$$

откуда имеем оценку (3.2.13).

б)

$$\int_a^\infty |r(x) \mathring{D} f|^2 dx \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2 \sum_{j=1}^{\infty} \left[\sum_{k=j-1}^{j+1} \int_{\Delta_k} |r(x) L_k^{-1}(f_k)|^2 dx \right] \leq 2 \sum_{j=1}^{\infty} \|r L_k^{-1}\|^2 \int_{\Delta_k} |f|^2 dx \leq \\
&\leq 32 C_0^2 \sum_{j=1}^{\infty} S^2(\tilde{x}_{j-1}) \int_{\Delta_k} |f|^2 dx \leq 32 C_0^2 \sup_{x \geq a} S^2(x) \int_a^{\infty} |f|^2 dt,
\end{aligned}$$

откуда следует оценка (3.2.14).

Лемма 3.6. Пусть $\|B_1\| + \|B_2\| < 1$. Тогда: а) оператор $I - B_1 - B_2$ обратим; б) имеет место равенство

$$L^{-1} = D(I - B_1 - B_2)^{-1}. \quad (3.2.15)$$

Доказательство. Для $f \in C_0^{\infty}(I)$ сумма

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j L_j^{-1}(f_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j \psi_j \cdot \psi_j = L_j^{-1}(f_j) \quad (j \geq 1)$$

берется по конечному множеству слагаемых. Поэтому

$$\begin{aligned}
&L \left(\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j L_j^{-1}(f_j) \right) = \sum_{j=1}^{\infty} L(\varphi_j \psi_j) = \\
&= - \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j'' \psi_j - 2 \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j' \psi_j' + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j (-\psi_j'' + q(x) \psi_j) = \\
&= -B_1 f - B_2 f + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j (\chi_j f) = -(B_1 + B_2) f + f. \quad (3.2.16)
\end{aligned}$$

Применяя (3.2.16) выводим:

$$\begin{aligned}
L^{-1} f &= L^{-1} \left(f - L \left(\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j \psi_j \right) + L \left(\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j \psi_j \right) \right) = \\
&= L^{-1} \left(f - f + \sum_{i=1}^2 B_i f + L D f \right) = L^{-1} \left(\sum_{i=1}^2 B_i \right) f + D f,
\end{aligned}$$

откуда следует, что

$$L^{-1}(I - B_1 - B_2) = D. \quad (3.2.17)$$

Поскольку $\|B_1\| + \|B_2\| < 1$, то существует обратный оператор $(I - B_1 - B_2)^{-1} = Q$. Применяя Q к равенству (3.2.17), получим

$$L^{-1} = D(I - B_1 - B_2)^{-1}.$$

Доказательство теоремы 3.2. Из условия (3.2.3) следует, что $\|B_1\| + \|B_2\| \leq A_0 K < 1$. В силу леммы 3.6 существует обратный оператор $L^{-1} = D(I - B_1 - B_2)^{-1}$. В силу леммы 3.2 достаточно доказать, что оператор $q L^{-1}$ является ограниченным оператором в $L_2(I)$. Из утверждения б) леммы 3.6 следует:

$$\|q L^{-1}\| = \|qD\| \|(I - B_1 - B_2)^{-1}\| \leq C_q(1 - A_0 K)^{-1} < \infty.$$

Теорема доказана.

Введем следующую «бегущую среднюю» от функции q^2 :

$$h^*(x) = h_\delta^*(x) = \sup \left\{ h > 0 : h^3 \inf_e \int_{\Delta_h(x)/e} q^2 dt \leq 1 \right\},$$

где $\Delta_h(x) = [x, x + h]$, $\inf$ берется по всем измеримым $e \subset \Delta_h(x)$ с мерой $|e| \leq \delta h$, $0 < \delta < 1$. Нетрудно показать, что для $q \geq 10 < h^*(x) \leq (1 - \delta)^{-1/4}(x \geq a)$. Положим $\Omega^*(x) = [x, x + h^*(x)]$.

Лемма 3.7. [13, с. 4-188] Существует $C^* = C^*(\delta) > 0$ такое, что

$$h^*(x)^{-4} \int_{\Omega^*(x)} |y|^2 dt \leq C^* \int_{\Omega^*(x)} (|y''|^2 + |qy|^2) dt (x \geq a)$$

для всех y , имеющих в $\bar{I}$ абсолютно непрерывную производную y' .

Теорема 3.3. Пусть выполнены условия теоремы 3.2. Если $z \in W_{2,q}^2 \cap M(W_2^{m-2} \rightarrow L_2)$, $Lz \in M(W_2^m \rightarrow L_2)$, то справедливы утверждения:

- а) $z \in M(W_2^m \rightarrow W_{2,q}^2)$;
- б) справедлива оценка

$$\|z\|_{M(W_2^m \rightarrow W_{2,q}^2)} \leq \tilde{C} \left[\|Lz\|_{M(W_2^m \rightarrow L_2)} + \|z\|_{M(W_2^{m-2} \rightarrow L_2)} + \|z\|_{W_{2,q}^2} \right].$$

Постоянная $\tilde{C}$ зависит только от числовых параметров.

В теореме 3.3 и далее ниже: $W_2^m = W_2^m(I)$, $L_2 = L_2(I)$.

Доказательство теоремы 3.3. а) Нам нужно показать, что для $q(\cdot) \geq 1$ имеет место оценка

$$\|zy\|_{W_{2,q}^2} = \|(zy)''\|_2 + \|q(zy)\|_2 < \infty \quad (3.2.18)$$

для всех $y \in W_2^m(I)$. Представим $\bar{I}$ как дизъюнктивное объединение, а именно $\bar{I} = \sqcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j$, $\Omega_j = [x_j, x_j + d_j)$, $d_j = h^*(x_j)$ ($j \geq 0$), $x_0 = a$. Если $y \in C_0^\infty(I)$, $F = \text{supp}(y)$, то

$$\begin{aligned} \|(yz)''\|_2 &= \|-yLz + 2y'z' + zy'' + qyz\|_2 \leq \\ &\leq \|Lz\|_{M(W_2^m \rightarrow L_2)} \|y\|_{W_2^m} + \|y''z\|_2 + \max_F |y| \|qz\|_2 + 2\|y'z'\|_2 \leq \\ &\leq \left(\|Lz\|_{M(W_2^m \rightarrow L_2)} + c_1 \|z\|_{M(W_2^{m-2} \rightarrow L_2)} + c_2 \|z\|_{W_{2,q}^2} \right) \|y\|_{W_2^m} + 2\|y'z'\|_2. \end{aligned}$$

На каждом Ω_j в силу (3.2.6) и леммы 3.7

$$\int_{\Omega_j} |y'z'|^2 dx \leq c_3 C^* d_j \int_{\Omega_j} (|z''|^2 + |qz|^2) dx \cdot \int_{\Omega_j} |y'|^2 dx,$$

Откуда

$$\int_a^\infty |y'z'|^2 dx \leq c_4 C^* R^* \|z\|_{W_{2,q}^2}^2 \|y\|_{W_2^m}^2, \quad (3.2.20)$$

где $R^* = \sup_{x \in \bar{I}} h^*(x) \leq (1 - \delta)^{-1/4}$. Из (3.2.19), (3.2.20) выводим, что $yz \in D(L)$ и в силу разделимости оператора L (теорема 3.2)

$$\begin{aligned} \|yz\|_{W_{2,q}^2} &\leq C(\|L(yz)\|_2 + \|yz\|_2) \leq \\ &\leq c_5 C \left(\|Ly\|_{M(W_2^m \rightarrow L_2)} + \|z\|_{M(W_2^{m-2} \rightarrow L_2)} + \|z\|_{W_{2,q}^2} \right) \|y\|_{W_2^m}. \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

Замечание. Из теоремы 3.3 следует, что каждое решение z уравнения

$$-z'' + q(x)z = f, \quad f \in M(W_2^m \rightarrow L_2)$$

из класса $W_{2,q}^2 \cap M(W_2^{m-2} \rightarrow L_2)$ является мультипликатором из W_2^m в $W_{2,q}^2$.

Пример 6. Пусть $q^2(x) = (1+x)^{2k} \sin^4 x^2 + 1$, $k \geq 1$ - целое; $I = (a, +\infty)$, $a \geq 8$. Простыми арифметическими действиями показываем, что:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{k}{2}} (1+x)^{-\frac{k}{2}} \leq q^*(x) \leq 2^k (1+x)^{-\frac{k}{2}}. \quad (3.2.22)$$

Возьмем $h(x) = A(1+x)^{-k/2}$, $A = 2^{k+1}A_0$. Тогда:

$$(1+A)^{-\frac{k}{2}}h(x) \leq h(t) \leq 2^{\frac{k}{2}}h(x), \quad t \in \Delta(x).$$

Условие (3.2.3) теоремы 3.2 очевидно, а из (3.2.22) следует:

$$\begin{aligned} & \left(\sup_{t \in \Delta(x)} q^*(t) \right)^2 \left(\sup_{t \in \Delta(x)} q^*(t) \int_{\Delta^*(t)} q^2(\xi) d\xi \right) \leq \\ & \leq \left(2^k (1+x)^{-\frac{k}{2}} \right)^2 \sup_{t \in \Delta(x)} \left[2^{2k} (1+t)^{-k} \left(1+t+A(1+t)^{-\frac{k}{2}} \right)^{2k} \right] \leq [2(1+A)]^{2k}. \end{aligned}$$

Тем самым мы можем утверждать, что оператор L с потенциалом $q(x) = \sqrt{1 + (1+x)^{2k} \sin^4 x^2}$ на $I = (a, +\infty)$ ($a \geq 8$) разделим, а также, что для него справедливы выводы теоремы 3.3.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей диссертации проведено комплексное исследование свойств несамосопряжённых и сингулярных дифференциальных операторов, а также задач аппроксимации решений уравнений типа Трибеля и операторов Штурма-Лиувилля в весовых пространствах Соболева и пространствах мультипликаторов. Основное внимание уделено построению обратимых расширений операторов, получению коэрцитивных оценок и разработке методов локализации на характеристических интервалах переменной длины.

Представленные результаты позволили сформировать целостную концепцию исследования операторов с коэффициентами, которые могут быть знакопеременными и обладать сингулярностями. В частности:

В первом разделе разработаны условия существования замкнутого обратимого расширения минимального оператора. Метод локальных оценок на характеристических промежутках позволил выявить внутренние связи между коэффициентами дифференциального выражения, обеспечивающие обратимость оператора.

Во втором разделе исследована задача наилучшего приближения решений уравнения Трибеля линейными методами. Получены верхние оценки считающей функции для последовательности линейных поперечников, а также построен пример с двусторонними оценками. Эти результаты имеют прикладное значение для численных методов решения нестандартных дифференциальных уравнений на бесконечной оси.

В третьем разделе получена коэрцитивная оценка для решений дифференциального уравнения, заданного несамосопряжённым оператором второго порядка в пространствах точечных мультипликаторов. Коэрцитивные оценки обеспечивают функциональные характеристики решений (гладкость, суммируемость и др.) и демонстрируют тесную связь между переменными коэффициентами уравнения и весовыми функциями в соответствующих пространствах Соболева. Кроме того, доказана теорема о разделимости оператора Штурма-Лиувилля в терминах точечных мультипликаторов. Использование метода локальных оценок на интервалах специальной длины позволило установить новые условия разделимости, расширяющие класс исследуемых операторов.

Таким образом, проведённые исследования вносят существенный вклад в развитие теории – дифференциальных операторов с переменными коэффициентами. Научная новизна работы заключается в:

- построении новых методов локализации оценок на характеристических интервалах;
- разработке условий обратимости и разделимости операторов в весовых пространствах;
- получении коэрцитивных оценок в терминах точечных мультипликаторов;

– применении методов аппроксимации для анализа решений сингулярных дифференциальных уравнений.

Практическая значимость результатов заключается в возможности их использования при разработке численных методов решения дифференциальных уравнений на бесконечной оси, а также в анализе спектральных свойств операторов, возникающих в математической физике.

В совокупности представленные результаты дополняют теорию несамосопряжённых и сингулярных операторов, расширяют инструментарий анализа в функциональных пространствах и открывают новые перспективы для применения полученных методов в задачах прикладной математики. Также их можно использовать в рамках элективных курсов по направлениям дифференциальные уравнения или функциональный анализ для студентов, магистрантов, докторантов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Everitt W.N., Giertz M. Some inequalities associated with certain differential operators // *Mathematische Zeitschrift*. – 1972. – Vol. 126. – P. 308-326.
- 2 Everitt W.N., Giertz M., Weidmann J. Some remarks on a separation and limit-point criterion of second-order, ordinary differential expressions // *Mathematische Annalen*. – 1973. – Vol. 200. – P. 335-346.
- 3 Бойматов К.Х. Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения // *Известия Математического института им. В.А. Стеклова*. – 1987. – №170(1). – С. 39-81.
- 4 Отелбаев М. Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в $\mathbb{R}^n$ // *Известия Математического института им. В.А. Стеклова*. – 1983. – №161. – С. 213-239.
- 5 Нейман-заде М.И., Шкаликов А.А. Операторы Шредингера с сингулярными потенциалами из пространств мультипликаторов // *Математические заметки*. – 1999. – №66(5). – С. 723-733.
- 6 Hieber M., Lorenzi L., Prüss J. et al. Global properties of generalized Ornstein-Uhlenbeck operators on $L_p(\mathbb{R}^n)$ with more than linearly growing coefficients // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. – 2009. – Vol. 350, Issue 1. – P. 100-121.
- 7 Беляев А.А., Шкаликов А.А. Мультипликаторы в пространствах бесселевых потенциалов: случай индексов неотрицательной гладкости // *Математические заметки*. – 2017. – №102(5). – С. 684-699.
- 8 Беляев А.А., Шкаликов А.А. Мультипликаторы в пространствах бесселевых потенциалов: случай индексов гладкости разного знака // *Алгебра и анализ*. – 2018. – №30(2). – С. 76-96.
- 9 Ospanov K.N., Akhmetkaliyeva R.D. Some inequalities for second order differential operators with unbounded drift // *Eurasian Mathematical Journal*. – 2015. – Vol. 6, Issue 2. – P. 63-74.
- 10 Ospanov K.N. Approximate Properties of Solutions of Second Order Differential Equations with Unbounded Drift Coefficient // *New Trends in Analysis and Interdisciplinary Applications: sel. contrib. of the 10th ISAAC congr.* – Cham, 2017. – P. 129-134.
- 11 Кусаинова Л.К. О мультипликаторах в весовых пространствах Соболева // *Математический сб.* – 2005. – Т. 196, №8. – С. 21-48.
- 12 Kussainova L., Myrzagaliyeva A. On multipliers in weighted Sobolev spaces. Part I // *Bulletin of the Karaganda University*. – 2016. – Issue 82(2). – P. 74-83.
- 13 Отелбаев М.О. Оценки спектра оператора Штурма-Лиувилля. – Алма-Ата: Гылым, 1990. – 190 с.
- 14 Отелбаев М.О., Кусаинова Л.К., Булабаев А. Оценки спектра одного класса дифференциальных операторов // *Збірник праць Інституту математики НАН України*. – 2009. – Т. 6, №1. – С. 165-190.
- 15 Ойнаров Р. О разделимости оператора Шредингера в пространстве суммируемых функций // *Докл. АН СССР*. – 1985. – Т. 285, №5. – С. 1062-1064.

- 16 Кусаинова Л.К. Теоремы вложения и интерполяции весовых пространств Соболева: автореф. ... док. физ-мат. наук: 01.01.01. – Караганда, 1999. – 34 с.
- 17 Савчук А.М., Шкаликов А.А. Операторы Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами // Математические заметки. – 1999. – №66(6). – С. 897-912.
- 18 Metafuni G., Pallara D., Pruss J. et al. L_p -Theory for Elliptic Operators on R_d with singular coefficients // Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen. – 2005. – Issue 24. – P. 497-521.
- 19 Ospanov K.N. L_1 -maximal regularity for quasilinear second order differential equation with damped term // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. – 2015. – Vol. 39. – P. 1-9.
- 20 Ospanov K.N. On types of the resolvent of a complete second order differential operator // AIP Conference Proceedings. – 2015. – Vol. 1676. – P. 020071.
- 21 Monsurrò S., Transirico M. A weighted $W^{2,p}$ -a priori bound for a class of elliptic operators // Journal of Inequalities and Applications. – 2011. – Vol. 2011, Issue 263. – P. 1-11.
- 22 Мирзоев К.А., Шкаликов А.А. Дифференциальные операторы чётного порядка с коэффициентами-распределениями // Математические заметки. – 2016. – №99(5). – С. 788-793.
- 23 Лизоркин П.И., Отелбаев М. Оценки аппроксимативных чисел оператора вложения для пространств Соболевского типа с весами // Тр. МИАН СССР. – 1984. – №170. – С. 213-232.
- 24 Айтенова М.С., Кусаинова Л.К. Об асимптотике распределения аппроксимативных чисел вложения весовых классов // Математический журнал. – 2002. – №2(1). – С. 3-9.
- 25 Кусаинова Л.К., Султанаев Я.Т., Мурат Г.К. Аппроксимативные оценки для одного дифференциального оператора в весовом гильбертовом пространстве // Дифференциальные уравнения. – 2019. – №55(12). – С. 1644-1651.
- 26 Muratbekov M., Abylayeva A., Muratbekov M. Estimates of singular numbers (s-numbers) and eigenvalues of a mixed elliptic-hyperbolic type operator with parabolic degeneration // CMMSE. – 2022. – Vol. 49, №5. – P. 217-230.
- 27 Макина Н.К., Назирова Э.А., Султанаев Я.Т. О методах исследования асимптотического поведения решений сингулярных дифференциальных уравнений // Математические заметки. – 2014. – №96(4). – С. 627-632.
- 28 Валеев Н.Ф., Мякинова О.В., Султанаев Я.Т. Об асимптотике решений сингулярного дифференциального уравнения n – го порядка с нерегулярными коэффициентами // Математические заметки. – 2018. – №104(4). – С. 626-631.
- 29 Валеев Н.Ф., Назирова Э.А., Султанаев Я.Т. Построение асимптотик решений дифференциальных уравнений Штурма-Лиувилля в классах осциллирующих коэффициентов // Вестник Московского университета. – 2023. – №5. – С. 61-65.

30 Kussainova L.K., Kassym A.S. On the separation property of the Sturm-Liouville operator in weighted spaces of multipliers // Journal of Mathematical Sciences. – 2019. – Vol. 241, Issue 5. – P. 596-604.

31 Куцаинова Л.К., Султанаев Я.Т., Касым А.С. Об одном обратимом расширении несамосопряженного сингулярного дифференциального оператора на оси // Дифференциальные уравнения. – 2021. – Т. 57, №10. – С. 1431-1435.

32 Kussainova L.K., Kassym A.S. On approximation of one singular differential equation on the axis // Bulletin of the Karaganda university. – 2022. – Issue 4(108). – P. 86-97.

33 Касым А.С. Об одной коэрцитивной оценке в пространствах мультипликаторов // Вестник КазНПУ им. Абая. – 2023. – №2(82). – С. 22-29.

34 Дынькин Е.М., Осиленкер Б.П. Весовые оценки сингулярных интегралов и их применения // Итоги науки и техники. – 1983. – №21. – С. 42-129.

35 Ospanov K.N. Maximal L_p -regularity for a second-order differential equation with unbounded intermediate coefficient // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. – 2019. – Vol. 2019, Issue 65. – P. 1-13.

36 Ospanov K.N. Nonlocal estimates for solutions of a singular higher order differential equation // AIP Conference Proceedings. – 2016. – Vol. 1759. – P. 020033.

37 Yesbayev A.N., Ospanov K.N. The solvability conditions for the second order nonlinear differential equation with unbounded coefficients in $L_2(R)$ // Bulletin of the Karaganda University. – 2021. – Vol. 1, Issue 101. – P. 104-110.

38 Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 526 с.

39 Yesbayev A.N., Ospanov K.N. Maximal regularity estimate for a differential equation with oscillating coefficients // Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. – 2021. – Vol. 109, Issue 1. – P. 25-35.

40 Пич А. Операторные идеалы / пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 536 с.

41 Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы / пер. с англ. – М.: Мир, 1980. – 665 с.

42 Муратбеков М.Б. Коэрцитивные оценки для одного дифференциального оператора высокого порядка // Дифференциальные уравнения. – 1981. – №16(5). – С. 893-901.

43 Shakhmurov V.B. Separability Properties of Singular Degenerate Abstract Differential Operators and Applications // Rocky Mountain Journal of Mathematics. – 2019. – Vol. 49, Issue 5. – P. 1647-1666.

44 Мазья В.Г., Шапошникова Т.О. Мультипликаторы в пространствах дифференцируемых функций. – Л.: ЛГУ, 1986. – 402 с.

45 Трибель Х. Теория функциональных пространств / пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 447 с.

46 Everitt W.N., Giertz M. Some properties of the domains of certain differential operators // Proc. Lond. Math. Soc. – 1971. – Vol. 23, Issue 3. – P. 301-324.

47 Шамин Р.В. Нелокальные параболические задачи: дис. ... канд. физ.-матем. наук: 01.01.02. – М., 2002. – 89 с.

- 48 Бойматов К.Х. Теоремы разделимости для оператора Штурма-Лиувилля // Математические заметки. – 1973. – №14(3). – С. 349-359.
- 49 Отелбаев М.О. О суммируемости с весом решения уравнения Штурма-Лиувилля // Математические заметки. – 1974. – №16(6). – С. 969-980.
- 50 Отелбаев М.О. О разделимости эллиптических операторов // Докл. АН СССР. – 1977. – Т. 234, №3. – С. 540-543.
- 51 Мынбаев К.Т., Отелбаев М. Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. – М.: Наука, 1988. – 282 с.
- 52 Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 543 с.
- 53 Гусман М. Дифференцирование интегралов в $\mathbb{R}_n$. – М.: Мир, 1978. – 200 с.
- 54 Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – Изд. 2-е. – М.: Наука, 1977. – 455 с.
- 55 Мазья В.Г. Пространства С.Л. Соболева. – Л., 1985. – 416 с.
- 56 Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложений. – М.: Наука, 1975. – 480 с.
- 57 Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – Изд. 3-е, перер. – М.: Наука, 1984. – 752 с.
- 58 Stein E.M. Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. – Princeton: Princeton University Press, 2016. – 306 p.