ҚАСЫМ АЙЖАН САҒЫМБАЙҚЫЗЫ

Весовые оценки для сингулярных дифференциальных операторов в функциональных пространствах

АННОТАЦИЯ
диссертации на соискание степени доктора философии (PhD)
по специальности 6D060100 – Математика

Актуальность исследования. Дифференциальные операторы как математические модели используются для глубокого анализа во многих областях научных исследований таких, как математическая физика, теория случайных процессов, биология, финансовая математика и др. К примеру, приложения дифференциальных операторов в механике и инженерии описывают колебания в вязкоупругих средах и динамику систем с сопротивлением. В биологии это могут быть модели роста и распространения популяций с шумом (выбросы, миграции) и экологические модели с пространственно меняющимися параметрами.

Современные направления исследований дифференциальных операторов включают в себя как неотъемлемую часть задачи, связанные с дифференциальными операторами (уравнениями) с различного типа сингулярностями переменных коэффициентов. В число этих сингулярностей, в частности, входят условия негладкости, неограниченности, быстро растущие колебания, свойство альтернанса знаков переменных коэффициентов при подходе к граничным точкам области их задания:

1) задачи, связанные с вопросами ограниченности, замкнутости (для неограниченных операторов), обратимости. Здесь важное значение имеет выбор (или построение новых) функциональных пространств, в которых рассматриваются исследуемые операторы. Такие задачи решались в работах W.N. Everitt, M. Giertz, K.X. Бойматова, М.О. Отелбаева, А.А. Шкаликова, M.Hieber, L. Lorenzi, A. Rhandi, R. Schnaubelt, К.Н. Оспанова, Л.К. Кусаиновой и др.;

2) весовые оценки решений дифференциальных уравнений, которые широко изучались в трудах многих авторов, в частности М.О. Отелбаева, Р.О. Ойнарова, G. Metafuni, D. Pallara, J. Pruss, К.Н. Оспанова, S. Monsurrò, M.Transirico, К.А. Мирзоева и др.;

3) задачи, связанные с выбором численных методов решения соответствующих дифференциальных уравнений. На языке функционального анализа это выражается: в выборе метода приближения решений конечномерными объектами; в задании меры приближения; в оценке точности приближения на n-м итерационном шаге. Такие задачи ранее решались П.И. Лизоркиным, М.О. Отелбаевым и в настоящее время М.С. Айтеновой, Л.К. Кусаиновой, М. Муратбековым, Н.К. Макиной, Э.Я. Назировой, Я.Т. Султанаевым и др.

Цель работы. Целью диссертационной работы является исследование определенных типов сингулярных обыкновенных дифференциальных операторов второго порядка на полуоси с коэффициентами, неограниченными в любой окрестности бесконечности.

Задачи исследований.

1. Исследование несамосопряженного обыкновенного дифференциального оператора (ОДО) с неограниченными и возможно знакопересенными в любой окрестности $+\infty$ коэффициентами. Описание условий, при которых существует корректно определенное замкнутое обратимое расширение. Оценки наилучших линейных приближений для дифференциальных уравнений, соответствующих исследуемому оператору.

2. Исследование ОДО 2-го порядка с коэффициентами, удовлетворяющими условиям типа Трибеля на $+\infty$. Функциональное описание и оценки наилучших линейных аппроксимаций для решений соответствующих дифференциальных уравнений.

3. Вывод функциональных коэрцитивных оценок для ОДО, а именно, в терминах мультипликаторов, действующих в пространствах решений.

Методы исследования. Основным методом исследования является метод установления локальных связей между коэффициентами исследуемых операторов на характеристических промежутках, являющийся развитием метода «бегущих средних» М.О. Отелбаева. А также в работе использованы методы функционального анализа, теории дифференциальных операторов и теории приближений в функциональных пространствах.

Научная новизна. Для дифференциальных операторов второго порядка были получены следующие новые результаты:

1. Получены условия существования замкнутого обратимого расширения сингулярного дифференциального оператора второго порядка с локально суммируемыми и знакопеременными коэффициентами в весовых функциональных пространствах.

2. Получены коэрцитивные оценки для сингулярных дифференциальных операторов в пространствах Соболева, Лебега и пространствах точечных мультипликаторов.

3. Получены теоремы о разделимости оператора Штурма–Лиувилля в терминах мультипликаторов и весовых характеристик коэффициентов.

4. Получены оценки наилучших линейных приближений решений сингулярных дифференциальных уравнений в терминах специальных максимальных операторов, построенных по базису промежутков переменной длины.

5. Получены оценки линейных поперечников множеств решений сингулярных дифференциальных уравнений в весовых функциональных пространствах.

Теоретическая и практическая значимость исследования. Полученные результаты носят теоретический характер и вносят вклад в развитие теории сингулярных дифференциальных операторов и функционального анализа. Разработанные методы и полученные результаты могут быть использованы при исследовании дифференциальных операторов и уравнений с сингулярными коэффициентами, в спектральной теории операторов, задачах численного анализа и теории приближений, а также в специальных курсах по функциональному анализу и теории дифференциальных уравнений.

Основные результаты, выносимые на защиту. 1. Условия существования замкнутых и обратимых расширений сингулярных дифференциальных операторов второго порядка с негладкими и знакопеременными коэффициентами.

2. Коэрцитивные оценки для сингулярных дифференциальных операторов в весовых пространствах Соболева, Лебега и пространствах мультипликаторов.

3. Теоремы о разделимости оператора Штурма–Лиувилля в весовых функциональных пространствах.

4. Оценки наилучших линейных приближений решений сингулярных дифференциальных уравнений.

5. Оценки линейных поперечников множеств решений дифференциальных уравнений.

Апробация работы Основные результаты диссертационной работы представлены и обсуждены на следующих конференциях и семинарах:

- международная научная конференция «Теоретические и прикладные вопросы математики, механики и информатики» (Караганда, 2019);
- международная научная конференция «Actual Problems of Analysis, Differential Equations and Algebra» (EMJ-2019)
- международная научная конференция Dedicated to the 10th Anniversary of the Eurasian Mathematical Journal (Нур-Султан, 2019);

- международная научная конференция «Проблемы современной фундаментальной и прикладной математики» (Нур-Султан, 2021).

- научный семинар «Seminario Dottorato» del Dipartimento di Matematica» под руководством профессоров Corrado Marastoni, Tiziano Vargiolu (Падова, 2021);

- научный семинар «Функциональный анализ и его приложения» под руководством академиков НАН РК М. Отелбаева, Р.О. Ойнарова, профессоров Е.Д. Нурсултанова, К.Н. Оспанова (Астана, 2025);

- научный семинар «Современные проблемы математики и информатики» под руководством д.ф.-м.н., профессора Нурсултанова Е.Д. (Астана, 2025).

Публикации Основной материал, представленный в диссертации, был опубликован в

1. On the separation property of the Sturm-Liouville operator in weighted spaces of multiplicators // Journal of Mathematical Sciences. - 2019. - Vol. 241, №5, - P. 596-604.
2. Об одном обратимом расширении несамосопряженного сингулярного дифференциального оператора на оси. // Дифференциальные уравнения. – 2021. - Т. 57, №10. - С. 1431-1435.
3. On approximation of one singular differential equation on the axis // Bulletin of the Karaganda university. Mathematics series. - 2022. - №4(108) - P. 86-97.
4. Об одной коэрцитивной оценке в пространствах мультипликаторов // Вестник КазНПУ им. Абая, серия «Физико-математические науки». - 2023. - №2(82) - С. 22-29.
5. О некоторых весовых оценках и их применениях в качестве теории дифференциальных операторов. // Международная научная конференция «Теоретические и прикладные вопросы математики, механики и информатики» (Караганда, 2019. - С. 33).
6. Коэрцитивные оценки для одного дифференциального оператора на оси в пространствах мультипликаторов // «Актуальные проблемы анализа, дифференциальных уравнений и алгебры»: международная конференция, посвященной 10-летию выпуска журнала «Eurasian Mathematical journal» (Нур-Султан, 2019. - С.40-42).
7. Об одной оценке для решений однородного дифференциального уравнения второго порядка. Международная научно-практическая конференция «Проблемы современной фундаментальной и прикладной математики» (Нур-Султан, 2021. - С.161-163).

Структура и объем диссертации. Работа объемом 92 страницы, состоит из введения, 3 разделов, заключения, списка литературы.

В первом разделе исследуются сингулярный дифференциальный оператор второго порядка на оси с локально суммируемыми коэффициентами, допускающими негладкость, неограниченность и неограниченное чередование знака. Для решения поставленных задач вводятся специальные функции длины, исследуются свойства допустимых весовых пар и устанавливаются локальные связи между коэффициентами оператора на характеристических промежутках. В этом разделе получены функциональные характеристики весовых пространств Соболева, доказаны теоремы о существовании замкнутого расширения исследуемого оператора и получены достаточные условия его обратимости. Установлены коэрцитивные оценки, связывающие норму решения с нормой правой части уравнения.

В этом же разделе рассматривается задача о наилучшей линейной аппроксимации множества решений сингулярного дифференциального уравнения. Для соответствующих классов решений получены оценки аппроксимативных чисел и оценки наилучших линейных приближений в терминах специальных максимальных операторов, построенных на базисе промежутков переменной длины. Построены примеры, иллюстрирующие применение полученных результатов.

Во втором разделе исследуются дифференциальный оператор второго порядка с коэффициентами из класса Трибеля и рассматриваются вопросы разрешимости соответствующих дифференциальных уравнений в весовых пространствах. Для исследуемого класса операторов построены функциональные пространства, описаны их

основные свойства и получены характеристики областей определения замкнутых операторов. Доказаны теоремы о существовании и ограниченности обратных операторов. Так же как и в первом разделе для множеств решений соответствующих дифференциальных уравнений исследована задача наилучших линейных приближений. Построены примеры, иллюстрирующие применение полученных результатов к конкретным классам сингулярных дифференциальных уравнений.

В третьем разделе получены коэрцитивные оценки для сингулярных дифференциальных операторов второго порядка как в классических функциональных пространствах, так и в пространствах точечных мультипликаторов. Исследуются вопросы разделимости операторов и функциональные характеристики решений соответствующих дифференциальных уравнений. Для широкого класса весовых пространств Соболева и Лебега доказаны коэрцитивные неравенства в пространствах мультипликаторов. Получены достаточные условия, при которых решения исследуемых уравнений являются мультипликаторами между весовыми функциональными пространствами. Особое внимание уделено оператору Штурма–Лиувилля с сингулярным потенциалом. Для данного оператора доказаны теоремы о разделимости в терминах весовых характеристик и мультипликаторов. Получены новые критерии разделимости, существенно расширяющие класс потенциалов, для которых оператор обладает данным свойством. Построены примеры, демонстрирующие применение полученных теоретических результатов.

Вклад докторанта в подготовку каждой публикации. Во всех опубликованных работах постановка задач и выбор методов исследования осуществлялись совместно с научными консультантами. Докторантом самостоятельно получены основные и вспомогательные результаты, проведены доказательства теорем и выполнено оформление результатов исследования.

Связь данной работы с другими научно-исследовательскими работами Тема диссертационного исследования соответствует приоритетному направлению развития «Научные исследования в области естественных наук», специализированное научное направление «Фундаментальные и прикладные исследования в области математики и механики». Часть результатов диссертации вошли в промежуточный отчет за 2021 г. по проекту AP08856104 «Дифференциальные операторы и сингулярными коэффициентами. Аппроксимативные характеристики. Спектр. Обратные задачи.» и за 2019 г. по проекту AP05133397 «Качественные и количественные характеристики сингулярных дифференциальных операторов. Мультипликаторы в теории дифференциальных операторов».

Количество использованных источников - 58.

Ключевые слова: сингулярные дифференциальные операторы, весовые оценки, коэрцитивные оценки, разделимость операторов, оператор Штурма–Лиувилля, пространства Соболева, пространства Лебега, пространства мультипликаторов, замкнутые расширения операторов, сингулярные коэффициенты, локально суммируемые коэффициенты.