

ҚАСЫМ АЙЖАН САҒЫМБАЙҚЫЗЫ
Функционалдық кеңістіктердегі сингулярлық дифференциалдық
операторлар үшін салмақты бағалаулар

6D060100 – Математика мамандығы бойынша философия докторы (PhD)
дәрежесін алу үшін дайындалған диссертацияның
АННОТАЦИЯСЫ

Зерттеудің өзектілігі. Математикалық модельдер ретінде дифференциалдық операторлар математикалық физика, кездейсоқ процестер теориясы, биология, қаржылық математика және т.б. сияқты ғылыми зерттеулердің көптеген салаларында терең талдау үшін қолданылады. Мысалы, механика мен инженерияда дифференциалдық операторлардың қолданылуы тұтқырлы-серпімді ортадағы тербелістерді және кедергісі бар жүйелердің динамикасын сипаттайды. Биологияда бұл шу (шайқалулар, миграциялар) бар популяциялардың өсу және таралу модельдері мен кеңістіктік өзгермелі параметрлері бар экологиялық модельдер болуы мүмкін.

Дифференциалдық операторларды зерттеудің қазіргі бағыттары өзгермелі коэффициенттердің әртүрлі типтегі сингулярлықтарымен байланысты дифференциалдық операторлар (теңдеулер) есептерін ажырамас бөлік ретінде қамтиды. Бұл сингулярлықтарға, атап айтқанда, тегіссіздік, шексіздік, жылдам өсетін тербелістер шарттары, айнымалы коэффициенттердің берілу облысының шекаралық нүктелеріне жақындаған кезде таңбаларының ауысу қасиеті кіреді:

- Шектелгендік, тұйықтылық (шектелмеген операторлар үшін), кері оператор бар болу мәселелерімен байланысты есептер. Мұнда зерттелетін операторлар қарастырылатын функционалдық кеңістіктерді таңдаудың (немесе жаңаларын құрудың) маңызы зор. Мұндай есептер W.N. Everitt, M. Giertz, Қ.Х. Бойматов, М.О. Өтелбаев, А.А. Шкаликов, M. Hieber, L. Lorenzi, A. Rhandi, R. Schnaubelt, Қ.Н. Оспанов, Л.Қ. Қусайынова және т.б. еңбектерінде шешілді;

- Дифференциалдық теңдеулер шешімдерінің салмақты бағалаулары, олар М.О. Өтелбаев, Р.О. Ойнаров, G. Metafunne, D. Pallara, J. Prüss, Қ.Н. Оспанов, S. Monsurro, M. Transirico, Қ.А. Мирзоев және т.б. сияқты көптеген авторлардың еңбектерінде кеңінен зерттелді;

- Сәйкес дифференциалдық теңдеулерді шешудің сандық әдістерін таңдауға байланысты есептер. Функционалдық талдау тілінде бұл: шешімдерді ақырлы өлшемді объектілермен жуықтау әдісін таңдауда; жуықтау өлшемін белгілеуде; n-ші итерациялық қадамдағы жуықтау дәлдігін бағалауда көрінеді. Мұндай есептерді бұрын П.И. Лизоркин, М.О. Өтелбаев шешкен, ал қазіргі уақытта М.С. Айтенова, Л.К. Кусаинова, М. Муратбеков, Н.К. Макина, Э.Я. Назирова, Я.Т. Султанаев және т.б. шешуде.

Жұмыстың мақсаты. Диссертациялық жұмыстың мақсаты шексіздіктің кез келген аймағында шектелмеген коэффициенттері бар жарты осьтегі екінші ретті сингулярлық кәдімгі дифференциалдық операторлардың белгілі типтерін зерттеу болып табылады.

Зерттеу міндеттері.

1. $+\infty$ кез келген аймағында шектелмеген және таңбасы ауысуы мүмкін коэффициенттері бар өзіне өзі түйіндес емес кәдімгі дифференциалдық операторды (КДО) зерттеу. Дұрыс анықталған тұйық кері операторы бар кеңейтілімінің табылу шарттарын сипаттау. Зерттелетін операторға сәйкес дифференциалдық теңдеулер үшін ең жақсы сызықтық жуықтауларды бағалау.

2. $+\infty$ -де Трибель типті шарттарды қанағаттандыратын коэффициенттері бар 2-ші реттік КДО зерттеу. Сәйкес дифференциалдық теңдеулер шешімдерінің функционалдық сипаттамасы мен ең жақсы сызықтық жуықтауларын бағалау.

3. КДО үшін функционалдық коэрцитивтік бағалауларды шешімдер кеңістіктерінде әрекет ететін мультипликаторлар тілінде шығару.

Зерттеу әдістері. Зерттеудің негізгі әдісі М.О. Өтелбаевтың «жылжымалы орташалар» әдісінің дамытылуы болып табылатын, зерттелетін операторлар коэффициенттері арасындағы жергілікті байланыстарды сипаттамалық аралықтарда белгілеу әдісі. Сондай-ақ жұмыста функционалдық талдау, дифференциалдық операторлар теориясы және функционалдық кеңістіктердегі жуықтау теориясының әдістері қолданылды.

Ғылыми жаңалығы. Екінші ретті дифференциалдық операторлар үшін келесі жаңа нәтижелер алынды:

1. Салмақты функционалдық кеңістіктерде локалды интегралданатын және таңбасы ауысатын коэффициенттері бар екінші ретті сингулярлық дифференциалдық оператордың тұйық кері операторы бар кеңейтілімінің табылу шарттары алынды.

2. Соболев кеңістіктерінде, Лебег кеңістіктерінде және нүктелік мультипликаторлар кеңістіктерінде сингулярлық дифференциалдық операторлар үшін коэрцитивтік бағалаулар алынды.

3. Штурм–Лиувилль операторының мультипликаторлар мен коэффициенттердің салмақты сипаттамалары тілінде бөлінгіштік теоремалары дәлелденді.

4. Айнымалы ұзындықтағы аралықтар базисінде құрылған арнайы максималдық операторлар тілінде сингулярлық дифференциалдық теңдеулер шешімдерінің ең жақсы сызықтық жуықтауларының бағалаулары алынды.

5. Салмақты функционалдық кеңістіктерде сингулярлық дифференциалдық теңдеулер шешімдер жиындарының сызықтық ендерін бағалаулары алынды.

Зерттеудің теориялық және практикалық маңыздылығы. Алынған нәтижелер теориялық сипатта болып, сингулярлық дифференциалдық операторлар теориясы мен функционалдық талдаудың дамуына үлес қосады. Жасалған әдістер мен алынған нәтижелер сингулярлық коэффициенттері бар дифференциалдық операторлар мен теңдеулерді зерттеуде, операторлардың спектралдық теориясында, сандық талдау және жуықтау теориясының есептерінде, сондай-ақ функционалдық талдау мен дифференциалдық теңдеулер теориясы бойынша арнайы курстарда пайдаланылуы мүмкін.

Қорғауға шығарылатын негізгі нәтижелер.

1. Тегіс емес және таңбасы ауысатын коэффициенттері бар екінші ретті сингулярлық дифференциалдық операторлардың тұйық және кері операторы бар кеңейтілімдерінің табылу шарттары.

2. Салмақты Соболев кеңістіктерінде, Лебег кеңістіктерінде және мультипликаторлар кеңістіктерінде сингулярлық дифференциалдық операторлар үшін коэрцитивтік бағалаулар.

3. Салмақты функционалдық кеңістіктерде Штурм–Лиувилль операторының бөлінгіштік теоремалары.

4. Сингулярлық дифференциалдық теңдеулер шешімдерінің ең жақсы сызықтық жуықтауларының бағалаулары.

5. Дифференциалдық теңдеулер шешімдер жиындарының сызықтық ендердің бағалаулары.

Жұмысты апробациялау. Диссертациялық жұмыстың негізгі нәтижелері келесі конференциялар мен семинарларда баяндалып, талқыланды:

- «Математика, механика және информатиканың теориялық және қолданбалы мәселелері» халықаралық ғылыми конференциясы (Қарағанды, 2019);
- «Actual Problems of Analysis, Differential Equations and Algebra» (EMJ-2019) халықаралық ғылыми конференциясы;
- «Eurasian Mathematical Journal» журналының 10 жылдығына арналған халықаралық ғылыми конференциясы (Нұр-Сұлтан, 2019);
- «Заманауи іргелі және қолданбалы математика мәселелері» халықаралық ғылыми конференциясы (Нұр-Сұлтан, 2021);
- Corrado Marastoni, Tiziano Vargiolu профессорларының басшылығымен «Seminario Dottorato del Dipartimento di Matematica» ғылыми семинары (Падова, 2021);
- ҚР ҰҒА академиктері М. Өтелбаев, Р.О. Ойнаров, профессорлар Е.Д. Нұрсұлтанов, Қ.Н. Оспановтың жетекшілігіндегі «Функционалдық талдау және оның қолданыстары» ғылыми семинары (Астана, 2025);
- Ф.-м.ғ.д., профессор Е.Д. Нұрсұлтановтың басшылығымен «Математика мен информатиканың заманауи мәселелері» ғылыми семинары (Астана, 2025).

Жарияланымдар. Диссертацияда келтірілген негізгі материал келесі басылымдарда жарияланды:

- On the separation property of the Sturm-Liouville operator in weighted spaces of multipliers // Journal of Mathematical Sciences. – 2019. – Vol. 241, №5. – P. 596–604.
- Осьтегі өзіне өзі түйіндес емес сингулярлық дифференциалдық оператордың бір кері операторы бар кеңейтілімі туралы // Дифференциалдық теңдеулер. – 2021. – Т. 57, №10. – Б. 1431–1435.
- On approximation of one singular differential equation on the axis // Bulletin of the Karaganda university. Mathematics series. – 2022. – №4(108). – P. 86–97.
- Мультипликаторлар кеңістіктеріндегі бір коэрцитивтік бағалау туралы // Абай атындағы ҚазҰПУ хабаршысы, «Физика-математика ғылымдары» сериясы. – 2023. – №2(82). – Б. 22–29.
- Кейбір салмақты бағалаулар мен олардың дифференциалдық операторлар теориясындағы қолданыстары туралы // «Математика, механика және информатиканың теориялық және қолданбалы мәселелері» халықаралық ғылыми конференциясы (Қарағанды, 2019. – Б. 33).
- Мультипликаторлар кеңістіктерінде осьтегі бір дифференциалдық оператор үшін коэрцитивтік бағалаулар // «Eurasian Mathematical Journal» журналының 10 жылдығына арналған «Анализ, дифференциалдық теңдеулер және алгебраның өзекті мәселелері» халықаралық конференциясы (Нұр-Сұлтан, 2019. – Б. 40–42).
- Екінші реттік біртекті дифференциалдық теңдеу шешімдерін бір бағалау туралы // «Қазіргі заманғы іргелі және қолданбалы математика мәселелері» халықаралық ғылыми-практикалық конференциясы (Нұр-Сұлтан, 2021. – Б. 161–163).

Диссертацияның құрылымы мен көлемі. Жұмыс 92 беттен тұрады, кіріспеден, 3 бөлімнен, қорытындыдан, әдебиеттер тізімінен тұрады.

Бірінші бөлімде тегіссіз, шексіз, шексіз таңба ауысуына жол беретін локалды интегралданатын коэффициенттері бар осьтегі екінші ретті сингулярлық дифференциалдық оператор зерттеледі. Қойылған есептерді шешу үшін арнайы ұзындық функциялары енгізіліп, рұқсат етілген салмақты жұптардың қасиеттері зерттеліп, оператор коэффициенттері арасындағы локалды байланыстар сипаттамалық аралықтарда белгіленеді. Бұл бөлімде салмақты Соболев кеңістіктерінің функционалдық сипаттамалары алынып, зерттелетін оператордың тұйық кеңейтілімінің болуы туралы теоремалар дәлелденіп, оның кері операторы болудың жеткілікті шарттары алынды. Шешім нормасын теңдеудің оң жағының нормасымен байланыстыратын коэрцитивтік бағалаулар белгіленді.

Осы бөлімде сондай-ақ сингулярлық дифференциалдық теңдеу шешімдер жиынының ең жақсы сызықтық жуықтауы есебі қарастырылады. Сәйкес шешімдер класстары үшін айнымалы ұзындықтағы аралықтар базисінде құрылған арнайы максималдық операторлар тілінде аппроксимативті сандарды бағалаулар мен ең жақсы сызықтық жуықтауларды бағалаулар алынды. Алынған нәтижелердің қолданылуын суреттейтін мысалдар келтірілді.

Екінші бөлімде Трибель класынан алынған коэффициенттері бар екінші ретті дифференциалдық оператор зерттеліп, сәйкес дифференциалдық теңдеулердің салмақты кеңістіктердегі шешімділік мәселелері қарастырылады. Зерттелетін операторлар класы үшін функционалдық кеңістіктер құрылып, олардың негізгі қасиеттері сипатталып, тұйық операторлардың анықталу облыстарының сипаттамалары алынды. Кері операторлардың болуы мен шектелгендігі туралы теоремалар дәлелденді. Бірінші бөлімдегідей сәйкес дифференциалдық теңдеулер шешімдер жиындары үшін ең жақсы сызықтық жуықтаулар есебі зерттелді. Алынған нәтижелердің сингулярлық дифференциалдық теңдеулердің нақты класстарына қолданылуын суреттейтін мысалдар келтірілді.

Үшінші бөлімде екінші ретті сингулярлық дифференциалдық операторлар үшін коэрцитивтік бағалаулар классикалық функционалдық кеңістіктерде, нүктелік мультипликаторлар кеңістіктерінде алынды. Операторлардың бөлінгіштік мәселелері мен сәйкес дифференциалдық теңдеулер шешімдерінің функционалдық сипаттамалары зерттеледі. Салмақты Соболев және Лебег кеңістіктерінің кең класы үшін мультипликаторлар кеңістіктерінде коэрцитивтік теңсіздіктер дәлелденді. Зерттелетін теңдеулердің шешімдері салмақты функционалдық кеңістіктер арасындағы мультипликаторлар болатын жеткілікті шарттар алынды. Сингулярлық потенциалды Штурм–Лиувиль операторына ерекше назар аударылды. Аталған оператор үшін салмақты сипаттамалар мен мультипликаторлар тілінде бөлінгіштік теоремалары дәлелденді. Операторда осы қасиет болатын потенциалдар класын елеулі түрде кеңейтетін бөлінгіштіктің жаңа критерийлері алынды. Алынған теориялық нәтижелердің қолданылуын көрсететін мысалдар келтірілді.

Докторанттың әрбір жарияланымды дайындауға қосқан үлесі. Барлық жарияланған жұмыстарда есептерді қою және зерттеу әдістерін тандау ғылыми кеңесшілермен бірлесіп жүргізілді. Докторант негізгі және қосымша нәтижелерді өз бетінше алып, теоремалардың дәлелдемелерін жүргізіп, зерттеу нәтижелерін ресімдеді.

Осы жұмыстың басқа ғылыми-зерттеу жұмыстарымен байланысы. Диссертациялық зерттеу тақырыбы «Жаратылыстану ғылымдары саласындағы ғылыми зерттеулер» басым даму бағытына, «Математика мен механика саласындағы іргелі және қолданбалы зерттеулер» мамандандырылған ғылыми бағытына сәйкес келеді. Диссертацияның кейбір нәтижелері АР08856104 «Сингулярлық коэффициенттері бар дифференциалдық операторлар. Жуықтамалық сипаттамалар. Спектр. Кері есептер» жобасы бойынша 2021 жылғы аралық есепке және АР05133397 «Сингулярлық дифференциалдық операторлардың сапалық және сандық сипаттамалары. Дифференциалдық операторлар теориясындағы мультипликаторлар» жобасы бойынша 2019 жылғы есепке енгізілді.

Пайдаланылған дереккөздер саны: 58.

Түйін сөздер: сингулярлық дифференциалдық операторлар, салмақты бағалаулар, коэрцитивтік бағалаулар, операторлардың бөлінгіштігі, Штурм–Лиувиль операторы, Соболев кеңістіктері, Лебег кеңістіктері, мультипликаторлар кеңістіктері, операторлардың тұйық кеңейтілімдері, сингулярлық коэффициенттер, локалды интегралданатын коэффициенттер.