Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

ӘОЖ 530.182 Қолжазба құқығында

ЖАСЫБАЕВА МЕРУЕРТ БАКТЫКЕНОВНА

Кейбір интегралданатын жалпыланған сызықты емес Шредингер типті теңдеулерді және олардың спиндік жүйелерін зерттеу

6D060400 – Физика

Философия докторы (PhD)
дәрежесін алу үшін дайындалған диссертация

Ғылыми кеңесшілер
физика-математика ғылымдарының докторы,
ҚР ҰҒА академигі, профессор
Мырзакулов Р.

физика-математика ғылымдарының кандидаты,
қауымдастырылған профессор
Есмаханова Қ.Р.

Шетелдік ғылыми кеңесші
физика-математика ғылымдарының докторы,
профессор Одинцов С.Д.
(Ғарыштық ғылымдар институты,
Барселона, Испания)

Қазақстан Республикасы
Астана, 2026

МАЗМҰНЫ

БЕЛГІЛЕУЛЕР МЕН ҚЫСҚАРТУЛАР..... 4
КІРІСПЕ..... 5
1 ИНТЕГРАЛДАНАТЫН СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС МОДЕЛДЕРДІҢ НАҚТЫ ШЕШІМДЕРІ..... 13
1.1 (1+1)-өлшемді Фокас-Ленэллс теңдеуі үшін Дарбу түрлендіруі..... 15
1.1.1 Солитонды шешім 18
1.2 Бірінші типтегі туындылы сызықты емес Шредингер теңдеуі үшін Дарбу түрлендіруі..... 20
1.2.1 Солитонды шешім..... 22
1.3 Жоғары ретті жалпыланған сызықты емес Шредингер теңдеуі: бризерлер және қиратушы толқындар..... 24
1.4 Фокас-Ленэллс теңдеуінің спиндік жүйесінің шешімдері..... 33
1.4.1 Спиндік жүйе..... 34
1.4.2 Қума толқын шешімі..... 36
1.4.3 Дарбу түрлендіруі..... 38
1.4.4 Солитонды шешім..... 40
Бөлім бойынша қорытынды..... 43
2 (2+1)-ӨЛШЕМДІ ЖӘНЕ ЕКІ КОМПОНЕНТТІ (2+1)-ӨЛШЕМДІ ФОКАС-ЛЕНЭЛЛС ТЕҢДЕУЛЕРІ ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ СПИНДІК ЖҮЙЕЛЕРІ..... 44
2.1 (2+1)-өлшемді Фокас-Ленэллс теңдеуінің шешімдері..... 45
2.1.1 (2+1)-өлшемді Фокас-Ленэллс теңдеуі..... 45
2.1.2 Билинеаризация..... 47
2.1.3 Хирота әдісімен солитонды шешімдер..... 49
2.1.4 Дарбу түрлендіруі әдісімен солитонды шешімдер..... 53
2.2 Екі компонентті (2+1)-өлшемді Фокас-Ленэллс теңдеуінің шешімдері... 62
2.2.1 Екі компонентті (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеуі..... 63
2.2.2 Дарбу түрлендіруі..... 66
2.2.3 Солитонды шешімдер..... 70
2.3 (2+1)-өлшемді Фокас-Ленэллс теңдеуінің (2+1)-өлшемді спиндік жүйесі..... 77
2.4 Екі компонентті Фокас-Ленэллс теңдеуінің екі компонентті спиндік жүйесі..... 79
2.5 Сақталу заңы..... 82
Бөлім бойынша қорытынды..... 83
3 ДИСПЕРСИЯСЫЗ ТЕҢДЕУЛЕР МЕН ОЛАРДЫҢ ГЕОМЕТРИЯСЫ..... 84
3.1 Фокас-Ленэллс теңдеуімен индукцияланған солитонды бет..... 84
3.1.1 Беттің фундаменталды формалары..... 84
3.1.2 Беттің ауданы және Гаусс қисықтығы..... 87
3.2 Теңдеулердің дисперсиясыз шектері..... 89
3.2.1 Фокас-Ленэллс теңдеуінің дисперсиясыз шектері..... 89

3.2.2 Фокас-Ленэллс теңдеуінің спиндік жүйесінің дисперсиясыз шегі..... 93
3.3 Комплексті байланысқан дисперсиясыз жүйенің спиндік жүйесінің солитонды шешімі..... 94
Бөлім бойынша қорытынды..... 96
ҚОРЫТЫНДЫ..... 98
ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ..... 100

БЕЛГІЛЕУЛЕР МЕН ҚЫСҚАРТУЛАР

ШКЕӘ – шашыраудың кері есеп әдісі
СЕШТ – сызықты емес Шредингер теңдеуі
ФЛ – Фокас-Ленэллс
КдФ – Кортевег-де Фриз
ЛЛ – Ландау-Лифшиц
СФ – Серре-Френе
ЛК – Лакс көрінісі
ЛЖ – Лакс жұбы
ДТ – Дарбу түрлендіруі
ТСЕШТ – туындылы сызықты емес Шредингер теңдеуі
ТСЕШТ-I – бірінші типтегі туындылы сызықты емес Шредингер теңдеуі
ТСЕШТ-II – екінші типтегі туындылы сызықты емес Шредингер теңдеуі
ЖСЕШТ – жалпыланған сызықты емес Шредингер теңдеуі
СТФ – Сим-Тафель формуласы
1ФФ – бірінші фундаменталды форма
2ФФ – екінші фундаменталды форма
ДДТ – дербес дифференциалдық теңдеулер
БЭК – Бозе-Эйнштейн конденсаты

КІРІСПЕ

Зерттелетін ғылыми мәселенің қазіргі жағдайы

Сызықты емес толқындық процестер қазіргі физиканың негізгі бағыттарының бірі болып табылады, себебі олар тек қана сызықты емес жүйелердің динамикасына деген фундаменталды қызығушылықты ғана емес, сонымен қатар кең ауқымды практикалық қолдануларды да қамтиды. Бірінші тұрақты локализацияланған толқындар Дж. Скотт Расселл тарапынан 1834 жылы Шотландиядағы Юнион каналы бойында байқалған [1]. Эксперимент көрсеткендей, мұндай толқындар таралу кезінде өз пішінін сақтап, диссипацияға төзімді болып келеді. Бұл құбылыстың математикалық негіздемесі 1895 жылы Кортевег-де Фриз (КдФ) теңдеуі арқылы алынған, ол толқын пішінінің сақталуының себебін дисперсия мен бейсызық арасындағы теңгеріліммен түсіндіріледі [2]. Толқын пішінінің өздігінен сақталу механизмі солитондардың жоғалтусыз сигналдарды ұзақ қашықтыққа жеткізу үшін қолданылуына негіз болған [3, 4].

Классикалық бір компонентті сызықты емес Шредингер теңдеуі (СЕШТ) толқындық теорияның дамуына шешуші рөл атқарып, оптикалық, плазмалық және конденсацияланған жүйелердегі локализацияланған құрылымдарды сипаттауға мүмкіндік береді [5, 6]. Сонымен қатар, мұндай модельдер солитондық динамиканы басқару мүмкіндіктері тұрғысынан шектеулі болып, ультрақысқа импульстер мен бірнеше толқындық өрістердің өзара әрекеттесуіне байланысты күрделі процестерді толық және дәл сипаттай алмайды.

Эксперименттік мүмкіндіктердің кеңеюі классикалық СЕШТ-нің ультрақысқа импульстер мен күрделі толқындық пакеттерді сипаттаудағы шектеулерін айқын көрсетті. Осыған байланысты қосымша бейсызықтық пен дисперсиялық әсерлерді, сондай-ақ кеңістік-уақыттық ортаның біртектіліксіздігін ескеретін жалпыланған СЕШТ (ЖСЕШТ) модельдерін зерттеу белсенді түрде дамуда [7, 8]. Сонымен қатар, (2+1)-өлшемді модельдер мен олардың көп компонентті жалпыламалары импульстердің көлденең бағыттағы динамикасын ескеруге және күрделі кеңістік-уақыттық құрылымдарды сипаттауға мүмкіндік береді. Бұл модельдер құйынды солитондарды, екі өлшемді локализацияланған құрылымдарды және солитондық беттерді зерттеуде маңызды рөл атқарады [9, 10].

Қазіргі зерттеулерде ерекше мән екі компонентті СЕШТ модельдеріне аударылады, олар оптикалық импульстердің екі сәулелі талшықтардағы таралуын және бозе-Эйнштейн конденсаттарындағы (БЭК) солитондардың динамикасын сипаттауға арналған. Мысалы, [11] жұмысында солитондардың тұрақтылығы мен сыртқы потенциалдардың әсері қарастырылған, бұл классикалық модельдердің өзгертілген модельдердің жаңа зерттеу бағыттарын ашатынын көрсетеді.

Сонымен қатар, жоғары ретті дисперсияны, толқындық пакеттердің өзіндік күрттенуін және ортаның кеңістік-уақыттық біртектіліксіздігін

қамтитын туындылы және жоғары ретті ЖСЕШТ модельдері белсенді зерттелуде [12, 13]. Бұл модельдерді талдау жаңа динамика режимдерін анықтауға, локализацияланған құрылымдардың өзара әрекетін зерттеуге және оларды басқару әдістерін әзірлеуге мүмкіндік береді [14].

Маңызды бағыттардың бірі – калибрлік түрлендіру арқылы сызықты емес теңдеулерге байланысты спиндік жүйелер [15]. Осыған байланысты (1+1)-өлшемді, (2+1)-өлшемді және екі компонентті спиндік жүйелер қарастырылып, жаңа шешімдер кластарын табуға, спиндік солитондардың тұрақтылығын зерттеуге және күрделі сызықты емес процестерді модельдеуге мүмкіндік береді [16, 17].

Осылайша, зерттеліп отырған ғылыми мәселенің қазіргі жағдайы СЕШТ-нің жалпыланған, көп өлшемді және көп компонентті модельдерінің қарқынды дамуымен сипатталады. Ерекше назар (2+1)-өлшемді Фокас-Ленэллс (ФЛ) теңдеуін, оның екі компонентті жалпыламасын, туындылы СЕШТ (ТСЕШТ) мен жоғары ретті ЖСЕШТ, сондай-ақ онымен байланысты спиндік жүйелерді зерттеуге аударылады. Мұндай кешенді зерттеу күрделі физикалық орталардағы локализацияланған құрылымдардың қалыптасу, тұрақтылық және эволюция механизмдерін терең түсінуге бағытталған болып, жұмыстың теориялық және қолданбалы маңыздылығын дәлелдейді.

Тақырыптың өзектілігі

Сызықты емес Шредингер типті теңдеулер мен олардың жалпыламаларының солитонды шешімдері әр түрлі физикалық жүйелерде қалыптасатын тұрақты локализацияланған толқындық құрылымдарды сипаттауда маңызды орын алады. Мұндай құрылымдар дисперсия мен бейсызықтықтың өзара теңгерілуі нәтижесінде пайда болып, таралу және өзара әсерлесу кезінде пішінін сақтайды. Осы қасиеттер солитондарды сызықты емес оптикада, плазма физикасында, магниттік орталарда, гидродинамикада және кванттық конденсацияланған жүйелерде негізгі зерттеу объектілерінің біріне айналдырады [18].

Ультрақысқа импульстерді, жоғары энергиялы толқындық пакеттерді және көп модалы орталарды зерттеу қажеттілігі классикалық СЕШТ шеңберінен шығатын неғұрлым дәл математикалық модельдерді талап етеді. Осындай модельдердің бірі – ФЛ теңдеуі, ол сызықты емес Шредингер типті интегралданатын теңдеу болып табылады және күшті бейсызықты әрі дисперсиялық орталарда ультрақысқа оптикалық импульстердің таралуын сипаттауға арналған [19]. Классикалық СЕШТ-пен салыстырғанда, ФЛ теңдеуі және туындылы Шредингер типті теңдеулер өздігінен күрттену, бейсызық дисперсия және фазалық модуляцияны сипаттайтын қосымша бейсызықты және туындылы мүшелерді қамтиды. Бұл ерекшеліктер аталған модельдердің физикалық шынайылығын арттырып, оларды қазіргі сызықты емес оптика мен плазма физикасындағы өзекті есептерді зерттеуде маңызды құралға айналдырады.

Алайда нақты физикалық жүйелер көбіне кеңістіктік құрылымы күрделі және толқындық өрістері векторлық сипатқа ие болады. Осыған байланысты

Шредингер типті теңдеулердің көп өлшемді және көп компонентті жалпыламалары, соның ішінде ФЛ теңдеуінің жалпыламалары ерекше мәнге ие. Мұндай модельдер бірнеше поляризациялық немесе модалық компоненттердің өзара әрекеттесуін, сондай-ақ энергияның күрделі қайта бөліну механизмдерін ескеруге мүмкіндік береді. Осы жүйелердегі солитонды шешімдерді аналитикалық зерттеу көп модалы оптикалық талшықтарда, фотондық кристалдарда, плазмалық толқын өткізгіштерде және магниттік орталарда байқалатын кеңістік-уақыттық күрделі құрылымдарды моделдеуге жол ашады.

Сонымен қатар, маңызды бағыттардың бірі – туындылы және жоғары ретті дисперсияны, толқындық пакеттердің өздігінен күрттенуін және ортаның біртектісіздігін ескеретін жоғары ретті ЖСЕШТ зерттеу болып табылады. Мұндай эффектілер фемтосекундтық импульстерді және экстремалды толқындық құбылыстарды, мысалы, бризерлер мен қиратушы толқындарды сипаттауда шешуші рөл атқарады. Нақты аналитикалық шешімдерін алу күрделі сызықсыз режимдердің физикалық табиғатын тереңірек түсінуге және ортаның параметрлері мен локализацияланған толқындардың сипаттамалары арасындағы байланысты анықтауға мүмкіндік береді.

Калибрлік түрлендіру арқылы жүзеге асатын Шредингер типті теңдеулердің спиндік жүйелермен байланысы ерекше қызығушылыққа ие. ФЛ теңдеулерінің интегралданатын спиндік модельдермен эквиваленттілігі солитонды шешімдерді геометриялық тұрғыдан интерпретациялауға, олардың тұрақтылығын талдауға және магниттік және оптикалық орталардағы сызықсыз динамиканы зерттеуге жаңа мүмкіндіктер ашады. Мұндай байланыстарды зерттеу солитондар физикасының теориялық аппаратын кеңейтеді және толқындық процестерді алгебралық-геометриялық тұрғыдан біртұтас түрде қарастыруға мүмкіндік береді [20].

Қазіргі интегралданатын жүйелер теориясының ажырамас бөлігі дисперсиялық шектерді зерттеу болып табылады. Мұндай модельдер градиенттік апаттарды, соққы толқындарын және өткір фронттарды күшті бейсызықты режимдерінде зерттеуге мүмкіндік береді. ФЛ теңдеуі мен оған байланысқан спиндік жүйелер үшін бұл ультрақысқа импульстердің дисперсиясы әлсіреген немесе басылған орталардағы эволюциясын модельдеуге мүмкіндік береді, мысалы, оптикалық талшықтарда, плазмада және БЭК-да.

Осылайша, аталған жұмыстың өзектілігі Шредингер типті жалпыланған, көп өлшемді және көп компонентті интегралданатын модельдерді кешенді зерттеу қажеттілігімен анықталады. Алынған шешімдер мен анықталған заңдылықтар локализацияланған толқындардың қалыптасуы, эволюциясы және өзара әрекеттесуін тереңірек түсінуге ықпал етеді және оларды сызықсыз оптикада, фотоникада, плазмада және конденсацияланған кванттық жүйелерде практикалық маңызын айтарлықтай арттырады.

Диссертациялық жұмыстың мақсаты – жалпыланған сызықты емес Шредингер типті теңдеулер мен олардың спиндік жүйелерін теориялық

тұрғыда зерттеу, олардың шешімдерін анықтау және олардың физикалық сипаттамаларын зерттеу. Осы мақсатқа жету үшін келесі нақты **міндеттер** қойылды:

1. Жалпыланған сызықты емес Шредингер типті теңдеулердің шешімдерін табу;
2. ФЛ теңдеуінің спиндік жүйесінің шешімдерін табу;
3. (2+1)-өлшемді және екі компонентті (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеулерін және олардың спиндік жүйелерін құру, олардың шешімдерін алу.

Зерттеу нысандары: интегралданатын жалпыланған сызықты емес Шредингер типті теңдеулер мен олардың спиндік жүйелері.

Зерттеу пәні: сызықты емес Шредингер типті теңдеулердің және ФЛ теңдеуінің спиндік жүйесінің солитонды шешімдерін іздеу.

Зерттеу әдістері: сызықты емес Шредингер типті теңдеулер мен спиндік жүйенің шешімдерін алу үшін Дарбу түрлендіруі (ДТ), Хирота әдісі және билинеаризациялау сияқты интегралданатын әдістерді қолдану, сондай-ақ ФЛ теңдеуіне эквивалентті спиндік жүйені алу үшін калибрлік түрлендіруді пайдалану.

Ғылыми жаңалығы, алғаш рет:

1. Жалпыланған сызықты емес Шредингер типті теңдеулер мен ФЛ теңдеуінің спиндік жүйесінің нақты шешімдері алынып, олардың физикалық қасиеттері (амплитудасы, локализациясы және тұрақтылығы) талданды.
2. (2+1)-өлшемді және екі компонентті (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеулері және олардың спиндік жүйелері құрылып, осы модельдер үшін нақты шешімдер табылды, әрі солитондардың кеңістікте таралу ерекшеліктері анықталды.
3. Интегралданатын модельдердің дисперсиясыз шектері құрылды және олардың Лакс жұптары арқылы интегралданатындығы дәлелденді, сондай-ақ осы модельдердің геометриялық интерпретациясы қарастырылды.

Диссертациялық жұмыстың теориялық және практикалық маңыздылығы

Бұл жұмыста жалпы жалпыланған сызықты емес Шредингер типті теңдеулер мен олардың спиндік жүйелерінің интегралданатын табиғатын, солитонды шешімдерін және геометриялық қасиеттерін зерттеуге бағытталған. Бұл зерттеу нәтижелері теориялық жағынан математикалық физика мен дифференциалдық геометрия әдістерін біріктіру арқылы жаңа шешімдер мен модельдер жасауға мүмкіндік береді. Практикалық жағынан олар оптика, плазма физикасы, магниттік жүйелер және телекоммуникация салаларында локализацияланған толқындарды сипаттау мен басқаруға, сондай-ақ сызықты емес құрылғылар мен технологияларды жобалауға қолданылады. Осылайша, жұмыс теориялық іргетасты кеңейтіп, нақты физикалық жүйелерде қолдануға мүмкіндік беретін практикалық мәнге ие.

Қорғауға шығарылатын негізгі қағидаттар:

1. Интегралданатын сызықты емес Шредингер типті теңдеулер үшін ДТ арқылы нақты локализацияланған толқындық шешімдер алынады. Уақытқа

тәуелді дисперсияның $a_1(t)$, $a_3(t)$ және бейсызықтықтың $a_2(t)$ коэффициенттері толқындардың локализациясын, амплитудасын, тұрақтылығын және траекториясын басқарады, ал λ спектрлік параметр локализацияланған толқындардың әр түрлі типтері арасында ауысуды қамтамасыз етеді.

2. ФЛ теңдеуі мен оның спиндік жүйесі $\Phi = g^{-1}\Psi$ (мұндағы $g(x,t)$ унитарлы 2×2 өлшемді матрица және $g = \Psi\big|_{z=\lambda_0}$) калибрлік түрлендіру арқылы эквивалентті, бұл бейсызықты толқындық процестерді спиндік жүйелер арқылы сипаттауға мүмкіндік береді және интегралданатын құрылымын сақтайды.

3. Үйлесімділік шарттары негізінде (2+1)-өлшемді және екі компонентті (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеулері алынады. ЛЖ олардың интегралданатындығын дәлелдейді. Алынған солитонды шешімдер бейсызықты толқындардың локализациясын, тұрақтылығын және серпімді өзара әрекеттесуін сипаттайды.

Нәтижелердің сенімділігі мен негізділігі

Зерттеу нәтижелерінің сенімділігі мен негізділігі Web of Science/Scopus деректер базасына енгізілген халықаралық рецензияланатын журналдарда және шетелдік конференциялар материалдарының жинақтарында жарияланған еңбектермен, сондай-ақ оларға шетелдік ғалымдардың жасалған сілтемелерімен дәлелденеді.

Автордың жеке үлесі

Диссертациялық зерттеу жұмысының барлық сатыларына автор тікелей қатысты. Ол зерттеу мәселесін қою, әдістемелерді әзірлеу, есептеулер жүргізу, нәтижелерді талдау, қорытындылар жасау және ғылыми мәтіндерді дайындау жұмыстарын орындады. Барлық жарияланған мақалаларда автордың ғылыми үлесі айқын көрініс тапқан және диссертация мазмұнын толық қамтиды.

Жұмыстар мен жарияланымдардың аппробациясы

Жұмыстың негізгі нәтижелері келесідей ғылыми конференцияларда талқыланды:

1. Ломоносов – 2018: студенттер, магистранттар және жас ғалымдардың 14-халықаралық ғылыми конференциясы (Астана, 2018).

2. International Conference on Technology, Engineering and Science (Antalya, 2018. – October 26-29).

3. Ғылым және Білім – 2018: студенттер мен жас ғалымдардың 13-халықаралық ғылыми конференциясы (Астана, 2018).

4. Анализдің, дифференциалдық теңдеулердің және алгебраның өзекті мәселелері» атты халықаралық конференция, 16-19 қазан 2019 (Астана, 2019).

5. Ғылым және Білім – 2019: студенттер мен жас ғалымдардың 14-халықаралық ғылыми конференциясы (Астана, 2019).

6. 8th international conference on Mathematical Modeling in Physical Sciences (Bratislava, 2019. – 26-29 August).

7. 4th international conference «Astrophysics, Gravity and Cosmology» (Astana 2019. – 29-30 October).

8. The 26th international conference on Integrable Systems and Quantum symmetries (Prague, 2019. – 8-12 July).

Бұдан бөлек, жұмыстың негізгі қорытындылары Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ-нің «Жалпы және теориялық физика» кафедрасында өткізілген семинарлар барысында баяндалып, пікір алмасу жүргізілді.

Зерттеу тақырыбы бойынша жарияланған ғылыми жұмыстар

Диссертациялық зерттеу нәтижелері негізінде жалпы 18 ғылыми жұмыс жарияланды, оның ішінде 4 мақала шетелдік журналдарда жарық көріп, Web of Science (Clarivate Analytics, АҚШ) және Scopus (Elsevier, Нидерланды) деректер базасында тіркелген және жоғары импакт-факторға ие (IF = 4.6 және IF = 2.2, квартильдері Q1, процентильдері 88 және 80). Сонымен қатар, Web of Science және Scopus дерекқорларында индекстелген журналдардың конференция материалдарында 2 мақала, шетелдік конференция материалдарында 1 мақала және Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым және жоғары білім саласындағы сапаны қамтамасыз ету комитеті ұсынған ғылыми басылымдарында 5 мақала және басқа басылымдарда 1 мақала жарияланды. Негізгі жұмыстар:

1. **Zhassybayeva M.,** Shaikhova G., Yesmakhanova K., Myrzakulova Z. Darboux transformation and exact soliton solutions of the two-component (2+1)-dimensional Fokas-Lenells equation // Results in Physics. – 2025. – Vol. 79. – P 108517 (Impact Factor 2024 – 4.6. Q1, Процентиль 89).

2. **Zhassybayeva M.,** Myrzakulova Z., Yesmakhanova K. Modified Fokas-Lenells equation: self-consistent sources and soliton solutions of the spin and (2+1)-dimensional models // Symmetry. – 2025. – Vol. 17, Issue 7. – P. 1961 (Impact Factor 2024 – 2.2. Q1, Процентиль 82).

3. Nugmanova G., Bekova G., **Zhassybayeva M.,** Taishiyeva A., Yesmakhanova K., Myrzakulova Z. Ferromagnet-type system: Integrable flows of curves/surfaces, soliton solutions, and equivalence // Symmetry. – 2025. – Vol. 17, Issue 7. – P. 1041 (Impact Factor 2024 – 2.2. Q1, Процентиль 82).

4. Taibi Z., Chaachoua Sameut H., **Zhassybayeva M.,** Sakthivinayagam P., Serikbayev N. Exploration of time-dependent dispersion and nonlinearity management in stabilization and transition of localized structures in nonlinear optical media // Symmetry. – 2025. – Vol. 17, Issue 12. – P. 2165 (Impact Factor 2024 – 2.2. Q1, Процентиль 82).

5. **Zhassybayeva M.,** Yesmakhanova K. Soliton surfaces induced by the Fokas-Lenells equation // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – Vol. 1416, Issue 1. – P. 012042 (Процентиль 27).

6. **Zhassybayeva M.,** Yesmakhanova K. Dispersionless limit of the (1+1)-dimensional Fokas-Lenells equation // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – Vol. 1391, Issue 1. – P. 012103 (Процентиль 27).

7. **Zhassybayeva M.,** Yesmakhanova K. The Construction of the (2+1)-Dimensional Integrable Fokas-Lenells Equation and its Bilinear form by Hirota Method // International Conference on Technology, Engineering and Science. – 2018. – Vol. 4. – P. 61-66.

8. **Жасыбаева М.Б.,** Мырзакулова Ж.Р. Преобразование Дарбу и солитонное решение производного нелинейного уравнения Шредингера первого типа. Вестник Торайгыров университета. Серия: Физика, математика и компьютерные науки. - Павлодар, 2025. - №3.

9. **Жасыбаева М.Б.,** Мырзакулова Ж.Р., Абеуова М. Преобразование Дарбу для двухслойного уравнения M-LXXII. Academic journal of physical and chemical sciences. – Алматы, 2025. №4. - С.24-37.

10. **Жасыбаева М.Б.,** Абеуова М. Бездисперсионный предел интегрируемого уравнения M-LXXII. Материалы XX Международной научной конференции студентов и молодых ученых «Наука и образование - 2025». – Астана, 2025. - С. 224-226.

11. **Мырзакулов Е.М.,** Жасыбаева М.Б., Каирбаева М.А. Екі компонентті Фокас-Ленэллс теңдеуімен байланысқан екі қабатты спинді жүйе. Вестник Кокшетауского университета имени Ш. Уалиханова. Серия Естественные науки. - Кокшетау, 2022. - №1. - С. 4-14.

12. **Жасыбаева М.Б.,** Есмаханова К.Р. Преобразование Дарбу и точное односолитонное решение уравнения Фокаса-Ленэллса. Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева. Серия Физика. Астрономия. - Нур-Султан, 2020. - №3(132). - С. 8-13.

13. **Zhassybayeva M.,** Yesmakhanova K. Soliton solutions for the (2+1)-dimensional integrable Fokas-Lenells equation. News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physico-mathematical series. – 2019. – Vol. 6, Issue 328. – P. 130-137.

14. **Жасыбаева М.Б.** Бездисперсионный предел (2+1)-мерного интегрируемого уравнения Фокаса-Ленэллса. Материалы XIV Международной научной конференции студентов и молодых ученых «Наука и образование - 2019». - Астана, 2019. - С. 260-262.

15. Айжан А., **Жасыбаева М.Б.,** Есмаханова К.Р. Представление Лакса бездисперсионного (2+1)-мерного уравнения Фокаса-Ленэллса. «Анализдің, дифференциалдық теңдеулердің және алгебраның өзекті мәселелері» (EMJ-2019) атты халықаралық конференция материалдары. – Астана, 2019.

16. **Жасыбаева М.Б.,** Нугманова Г.Н. Спиновая система, эквивалентная интегрируемому уравнению Фокаса-Ленэллса. Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева. Серия Физика. Астрономия. - Астана, 2018. - №1(122). - С. 53-57.

17. **Жасыбаева М.Б.** Односолитонное решение уравнение M-LXXII. Материалы XIII Международной научной конференции студентов и молодых ученых «Наука и образование - 2018». - Астана, 2018. - С. 396-399.

18. **Жасыбаева М.Б.** Об одном интегрируемом уравнении Фокаса-Ленэллса с самосогласованным источником. Материалы XIV Международной научной конференции студентов, магистрантов и молодых ученых «Ломоносов – 2018». - Астана, 2018. - С. 19-21.

Докторант М.Б. Жасыбаеваның ғылыми метрикалық көрсеткіштері: Web of Science деректер қорында h-index – 2 (Citation 27), Scopus деректер қорында h-index – 3 (Citation 28).

Жұмыстың ғылыми-зерттеу жұмыстарымен байланысы

Жұмыс келесі жобалар бойынша гранттық қаржыландыру аясындағы ғылыми-зерттеу жұмыстарының жоспарларына сәйкес орындалды:

1. «Эйнштейндік және эйнштейндік емес гравитация теориясы шеңберінде астрофизика және космологияның кейбір мәселелерін зерттеу» (2018-2020 жж.), мемлекеттік тіркелу №0118РК00935. Келісімшарт 03-02-12/1942, 24.04.2018 ж. Жетекшісі: Р. Мырзакулов.

2. «Фокас-Ленэллс типті теңдеулердің солитондар динамикасын зерттеу» (2025-2027 жж.). Грант нөмірі: AP25794905. Жетекшісі: М.Б. Жасыбаева.

Диссертациялық жұмыстың құрылымы мен көлемі. Диссертациялық жұмыстың құрылымы қойылған мақсаттармен айқындалған және кіріспе, үш бөлім, қорытындыдан тұрады. Жұмыс 108 бет басылған мәтіннен, 26 суретпен және 137 атаудан тұратын пайдаланылған әдебиеттер тізімін қамтиды.

1 ИНТЕГРАЛДАНАТЫН СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС МОДЕЛДЕРДІҢ НАҚТЫ ШЕШІМДЕРІ

Қазіргі математикалық физика мен сызықты емес толқындық процестер теориясында интегралданатын дербес дифференциалдық теңдеулерді (ДДТ) зерттеу аса маңызды бағыттардың бірі болып табылады. Мұндай теңдеулер оптикалық жүйелердегі ультрақысқа импульстердің таралуынан бастап, плазмалық орта мен гидродинамикадағы толқындық құбылыстарға дейінгі көптеген физикалық процестерді дәл сипаттайды. Фундаменталды заңдар көбіне сызықты модельдер арқылы тұжырымдалғанымен, нақты ортада бейсызық әсерлер жетекші рөл атқарады, сондықтан оларды талдау үшін күрделі эволюциялық теңдеулер қажет. Осы тұрғыда интегралданатын жүйелердің артықшылығы – солитондар, бризерлер және экстремалды локализацияланған толқындар сияқты аналитикалық шешімдердің бар болуы.

Интегралданатын модельдердің классикалық мысалдарына КдФ теңдеуі, син-Гордон теңдеуі және СЕШТ жатады. Бұл теңдеулер таяз су толқындары, конденсацияланған ортадағы сызықты емес тербелістер, оптикадағы жарық импульстерінің эволюциясы сияқты әр түрлі физикалық процестерді сипаттауда кеңінен қолданылады [21-23]. Сонымен қатар, интегралданатын спиндік жүйелер де ерекше қызығушылық тудырады [24]. Осындай жүйелердің ішінде ең алғашқы және маңызды модельдердің бірі – Ландау-Лифшиц (ЛЛ) теңдеуінің жалпыламасы ретінде қарастырылатын Гейзенбергтің ферромагнеттік теңдеуі. Айта кету керек, ЛЛ теңдеуі СЕШТ-не калибрлік эквивалентті екені белгілі [25-27]. Осы эквивалентті спиндік жүйелер мен СЕШТ типті теңдеулердің арасындағы терең математикалық байланысты көрсетіп, оларды бірыңғай әдістер арқылы зерттеуге мүмкіндік береді.

Осы бөлімде (1+1)-өлшемді ФЛ теңдеуі, бірінші типтегі ТСЕШТ (ТСЕШТ-I), жоғары ретті ЖСЕШТ, сондай-ақ ФЛ теңдеуіне калибрлік эквивалентті спиндік жүйе қарастырылады. Аталған теңдеулер нақты физикалық жүйелерде маңызды рөл атқарады: оптикада олар дисперсиялық әсерлерді өтей отырып, тұрақты импульстердің таралуын сипаттайды, ал плазмалық ортада локализацияланған толқындық құрылымдардың пайда болуын түсіндіреді. Толқындардың тұрақтылығы мен энергия тасымалы механизмдерін түсіну үшін мұндай модельдердің нақты шешімдерін аналитикалық түрде алу аса өзекті. Мұндай локализацияланған құрылымдар энергияны үлкен қашықтықтарға жоғалтусыз тасымалдауға қабілетті болғандықтан, олар талшықты-оптикалық байланыс жүйелері, фотондық құрылымдар және жоғары жылдамдықты сигнал беру технологиялары үшін ерекше қызығушылық тудырады.

ДТ негізінде ФЛ теңдеуі мен ТСЕШТ-I үшін бір солитонды шешімдер құрылады. Зерттеу әрі қарай уақытқа тәуелді коэффициенттері бар жоғары ретті ЖСЕШТ қарастырумен жалғасады. Мұнда дисперсияның бірнеше деңгейі, Керр типті бейсызықтық және жоғары ретті түзетулер ескеріліп, олардың толқын динамикасына әсері талданады. ДТ әдісін қолдану арқылы аталған жоғары ретті

ЖСЕШТ үшін бризерлік шешімдер мен экстремалды локализацияланған «қиратушы толқындар» типіндегі нақты аналитикалық шешімдер алынады. Спектрлік параметрдің өзгеруі толқын пішіндерінің әр түрлі режимдер арасындағы ауысуын басқаратыны көрсетіліп, параметрлерді өзгерту арқылы толқын симметриясының бұзылуы, локализация орталығының ығысуы және энергия шоғырлануының басқарылуы айқындалады.

Сонымен бірге, ФЛ теңдеуіне эквивалентті спиндік жүйе үшін Лакс көрінісі (ЛК) анықталып, оның негізінде екі түрлі нақты шешім алынады: біріншісі – спин векторының бұрыштық параметризациясына сүйенетін қума толқын (travelling wave) шешімі, екіншісі – локализацияланған солитонды шешім. Бұл шешімдер нақты физикалық процестерді сипаттаумен қатар, интегралданатын жүйелердің құрылымдық қасиеттерін анықтайтын геометриялық және алгебралық байланыстарды тереңірек түсінуге жағдай жасайды.

Интегралданатын теңдеулердің айрықша мысалдарының бірі – ФЛ теңдеуі. Бұл теңдеуді алғаш рет 1995 жылы Фокас би-Гамильтондық тәсіл негізінде ұсынған [28]. Кейінірек, 2009 жылы Фокас пен Ленэллс аталған модель үшін ЛК-сін құрып, оның интегралданатын құрылымын толық сипаттады [29-32]. ФЛ теңдеуі сызықты емес ортадағы ультрақысқа оптикалық импульстердің таралуын сипаттап, дисперсия мен сызықты емес әсерлердің жоғары ретті мүшелерін қамтитын СЕШТ-нің интегралданатын жалпыламасы болып табылады [33, 34].

Интегралданатын жүйелердің тағы бір маңызды класына ТСЕШТ жатады. Бұл теңдеу 1970-жылдары сызықты емес мүшесі кеңістіктік туынды арқылы анықталатын Шредингер теңдеуінің модификациясы ретінде зерттеле бастады. Қазіргі уақытта оның екі негізгі нұсқасы белгілі – ТСЕШТ-I және екінші типтегі ТСЕШТ (ТСЕШТ-II). Бұл модельдер магниттелген плазмада айналмалы поляризацияланған Альфвен толқындарының таралуын сипаттауда [35-37], сондай-ақ толқын жолдары теориясында кеңінен қолданылады. Бірінші типтегі теңдеуді Кауп пен Ньюэлл ұсынған [35, p. 798-800], ал оның түрлендірілген нұсқасын Чен-Ли-Лю теңдеуі (ТСЕШТ-II) деп аталады [38]. ТСЕШТ-I кеңістіктік туындылы сызықты емес мүшені қамтитын интегралданатын модель болып табылады және дисперсия мен амплитудаға тәуелді фазаның күрделі өзара әсерін сипаттайды. Мұндай туындылы бейсызықтық толқын профилінің асимметриясын және фазалық модуляциясын тудырады. Осы ерекшеліктеріне байланысты ол оптикалық және плазмалық орталарда маңызды қолданбаларға ие және Лакс жұбының (ЛЖ), солитонды шешімдердің бар болуымен сипатталады.

Бұл бөлімде аталған теңдеулердің, сондай-ақ ФЛ теңдеуіне калибрлік эквивалентті спиндік жүйенің нақты шешімдері алынады. Бұл шешімдер оқшауланған толқын түрінде болып, өзара әрекеттесу кезінде серпімділік қасиетін көрсетеді, яғни соқтығысудан кейін пішіні мен таралу жылдамдығын сақтайды. Мұндай локализацияланған толқындар жаратылыстану ғылымдарының көптеген салаларында маңызды рөл атқарады.

Интегралданатын теңдеулердің солитонды және басқа локализацияланған шешімдерін құру үшін бірқатар қуатты аналитикалық әдістер әзірленген. Олардың қатарына шашыраудың кері есебі әдісі (ШКЕӘ) [39, 40], Хирота бисызықты әдісі [41], Бэклунд түрлендірулері [42], алгебралық-геометриялық тәсілдер [43, 44] және ДТ жатады. Осы әдістердің ішінде ДТ алгоритмдік қарапайымдылығымен, әмбебаптығымен және әр түрлі бастапқы (seed) шешімдерден көп солитонды құрылымдарды жүйелі түрде құру мүмкіндігімен ерекшеленеді [45-47]. Хирота әдісі билинеаризация мен пертурбативті жіктеулерді талап етсе, ШКЕӘ мен Риман-Гильберт тәсілдері күрделі спектрлік талдауға негізделеді. Ал Бэклунд түрлендірулерімен салыстырғанда, ДТ басты артықшылығы – оның ЛЖ-на негізделген айқын алгебралық құрылымы, бұл жоғары өлшемді және матрицалық жалпылауларды да салыстырмалы түрде оңай құруға мүмкіндік береді. Осы себепті ДТ ФЛ теңдеуі сияқты ЛЖ күрделі құрылымға ие интегралданатын теңдеулер үшін ең тиімді әдістердің бірі болып саналады. Сонымен қатар, бұл әдіс бризерлер мен қиратушы толқындар сияқты күрделі локализацияланған құрылымдарды алуға мүмкіндік беріп, шешімдер класын едәуір кеңейтеді. Бұл құрылымдар энергияның локализациясы мен экстремалды толқындық процестерді зерттеуде маңызды рөл атқарады.

Сонымен, келесі бөлімшелерде қарастырылып отырған модельдердің нақты шешімдері ДТ әдісі арқылы жүйелі түрде құрылады.

1.1 (1+1)-өлшемді Фокас-Ленэллс теңдеуі үшін Дарбу түрлендіруі

Оптикалық талшықтардағы ультрақысқа сызықты емес импульстердің таралуын сипаттайтын ФЛ теңдеуі математикалық тұрғыдан Камасса-Холм теңдеуінің КдФ теңдеуімен байланысына ұқсас, СЕШТ-мен тығыз байланысты. ФЛ теңдеуі СЕШТ-нің жоғары ретті дисперсиялық және сызықты емес түзетулерді қамтитын интегралданатын жалпыламасы болып табылады. Аталған теңдеу келесідей түрде жазылады [48]:

$$iq_{xt} - iq_{xx} + 2q_x - |q|^2 q_x + iq = 0, \tag{1}$$

мұнда q – өрістің комплексті қабықшасы, ал $|q|^2$ толқын интенсивтілігін сипаттайды. x және t индекстері сәйкесінше кеңістік және уақыт айнымалылары бойынша дербес туындыларды білдіреді және i жорамал бірлік.

Сонымен қатар, (1) теңдеуді модификацияланған түрде $r = \bar{q}$ (мұнда өрнек үстіндегі сызық түйіндесін білдіреді) жазуға болады

$$iq_{xt} - iq_{xx} + 2q_x - q_x qr + iq = 0, \tag{2}$$

$$ir_{xt} - ir_{xx} - 2r_x + r_x rq + ir = 0. \tag{3}$$

(2)-(3) теңдеулер жүйесінің ЛЖ-ның түрі

$$\Phi_x = U\Phi, \tag{4}$$

$$\Phi_t = V\Phi, \tag{5}$$

бұл жердегі $\Phi(\lambda)$ – λ спектрлік параметрдің (немесе меншікті мән) меншікті функциясы, ал U және V матрицалық операторлары келесідей:

$$U = -i\lambda^2\sigma_3 + \lambda Q, \tag{6}$$

$$V = -i\lambda^2\sigma_3 + \lambda Q + V_0 + \frac{1}{\lambda}V_{-1} - \frac{i}{4\lambda^2}\sigma_3, \tag{7}$$

мұнда $Q = \begin{pmatrix} 0 & q_x \\ r_x & 0 \end{pmatrix}$, $V_0 = i\sigma_3 - \frac{iqr}{2}\sigma_3$, $V_{-1} = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & q \\ -r & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(4) және (5) теңдеулер үшін $U_t - V_x + [U,V] = 0$ үйлесімділік шарты орындалады. Осы үйлесімділік шартының орындаулы нәтижесінде (2) және (3) теңдеулер жүйесі алынады.

Енді (1) теңдеудің бір солитонды шешімін табу үшін ДТ әдісін қолданылады. ДТ интегралданатын сызықты емес теңдеулердің нақты шешімдерін аналитикалық түрде құрудың ең тиімді әдістерінің бірі болып табылады. Бұл әдіс бастапқы шешімнен жаңа локализацияланған толқындық құрылымдарды, соның ішінде солитондар мен бризерлерді алуға мүмкіндік береді.

1-ретті ДТ құру үшін (2) және (3) теңдеулерді келесі түрде қайта жазылады:

$$\Phi_x^{[1]} = U^{[1]}\Phi^{[1]} = (T_x + T\,U)T^{-1}\Phi^{[1]}, \tag{8}$$

$$\Phi_t^{[1]} = V^{[1]}\Phi^{[1]} = (T_t + T\,V)T^{-1}\Phi^{[1]}, \tag{9}$$

мұнда $\Phi^{[1]}$ шамасын $\Phi^{[1]} = T\,\Phi$ түрінде орнатылады. Ал, Дарбу операторын

$$T = \lambda N + M + \lambda^{-1}K, \tag{10}$$

түрінде таңдалынады [49, 50]. Бұл жердегі

$$N = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix},\ M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix},$$

яғни

$$T = T_1(\lambda) = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}\lambda^{-1}.$$

Мұндағы n_{ij}, m_{ij} және k_{ij} $(i, j = 1, 2)$ анықтауды қажет ететін белгісіз матрицалар. (8) және (9) жүйесінің үйлесімділік шарты бойынша

$$T_x + TU = U^{[1]}T, \tag{11}$$

$$T_t + TV = V^{[1]}T. \tag{12}$$

(6), (7) және (10) теңдеулерді кезекпен (11) теңдеуге, сосын (12) теңдеуге қойып, λ дәрежелері бойынша жіктеген соң, құраушылары бойынша жазылады

$$n_{12} = n_{21} = k_{12} = k_{21} = 0, \quad q^{[1]} = q\frac{k_{11}}{k_{22}}, \quad r^{[1]} = r\frac{k_{22}}{k_{11}},$$

мұнда $k_{11} = k_{22} = 1$, содан кейін $m_{11} = m_{22} = 0$ деп алынады. Сонда

$$T_1 = \begin{pmatrix} n_{11} & 0 \\ 0 & n_{22} \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} 0 & m_{12} \\ m_{21} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\lambda^{-1}.$$

Енді меншікті функциямен өрнектелетін n_{11}, n_{22}, m_{12} және m_{21} табу керек. Оларды табу үшін

$$N = H\Lambda^{-1}H^{-1}, \tag{13}$$

делік, бұл жердегі

$$H = \begin{pmatrix} \Phi_1 & -\overline{\Phi}_2 \\ \Phi_2 & \overline{\Phi}_1 \end{pmatrix}, \quad H^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \overline{\Phi}_1 & \overline{\Phi}_2 \\ -\Phi_2 & \Phi_1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} \end{pmatrix},$$

мұнда $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1 = \lambda$ және $\Delta = |\Phi_1|^2 + |\Phi_2|^2$. Ол (13) теңдеуге қойылады

$$N = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \lambda^{-1}|\Phi_1|^2 + \overline{\lambda}^{-1}|\Phi_2|^2 & \lambda^{-1}\Phi_1\overline{\Phi}_2 - \overline{\lambda}^{-1}\Phi_1\overline{\Phi}_2 \\ \lambda^{-1}\overline{\Phi}_1\Phi_2 - \overline{\lambda}^{-1}\overline{\Phi}_1\Phi_2 & \lambda^{-1}|\Phi_2|^2 + \overline{\lambda}^{-1}|\Phi_1|^2 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Осылайша, (14) теңдеуден ізделінді n_{11} және n_{22} функцияларын алынады

$$n_{11} = \frac{\lambda^{-1}|\Phi_1|^2 + \overline{\lambda}^{-1}|\Phi_2|^2}{\Delta}, \quad n_{22} = \frac{\lambda^{-1}|\Phi_2|^2 + \overline{\lambda}^{-1}|\Phi_1|^2}{\Delta}.$$

Енді, M матрицаның m_{12} және m_{21} құраушылары табылады

$$M = H_1 \Lambda_1^{-1} H_1^{-1}, \tag{15}$$

бұл жердегі $H_1 = \begin{pmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ -\overline{\Phi}_2 & \overline{\Phi}_1 \end{pmatrix}$, $H_1^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \overline{\Phi}_1 & -\Phi_2 \\ \overline{\Phi}_2 & \Phi_1 \end{pmatrix}$, $\Lambda_1^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_2^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda_1^{-1} \end{pmatrix}$.

Осыларды (15) теңдеуге қойғанда табылатыны

$$M = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \overline{\lambda}^{-1}|\Phi_1|^2 + \lambda^{-1}|\Phi_2|^2 & -\overline{\lambda}^{-1}\Phi_1\Phi_2 + \lambda^{-1}\Phi_1\Phi_2 \\ -\overline{\lambda}^{-1}\overline{\Phi}_1\overline{\Phi}_2 + \lambda^{-1}\overline{\Phi}_1\overline{\Phi}_2 & \overline{\lambda}^{-1}|\Phi_2|^2 + \lambda^{-1}|\Phi_1|^2 \end{pmatrix}.$$

Осы жерден $m_{12} = \frac{(\lambda^{-1} - \overline{\lambda}^{-1})\Phi_1\Phi_2}{\Delta}$ және $m_{21} = \frac{(\lambda^{-1} - \overline{\lambda}^{-1})\overline{\Phi}_1\overline{\Phi}_2}{\Delta}$ шығады. Демек, $q^{[1]}$ және $r^{[1]}$ келесі түрді қабылдайды:

$$q^{[1]} = q + \frac{(\lambda^{-1} - \overline{\lambda}^{-1})\Phi_1\Phi_2}{\Delta}, \qquad r^{[1]} = r + \frac{(\lambda^{-1} - \overline{\lambda}^{-1})\overline{\Phi}_1\overline{\Phi}_2}{\Delta}. \tag{16}$$

Осылайша, 1-ретті ДТ құрылды.

1.1.1 Солитонды шешім

(2) және (3) теңдеулерінің солитонды шешімін табу үшін нөлдік шешім $q = r = 0$ түрінде алынады. Осы нөлдік шешімді ескере отырып, сәйкес сызықты жүйе келесі түрге келеді:

$$\Phi_{1x} = -i\lambda^2\Phi_1, \tag{17}$$

$$\Phi_{2x} = -i\lambda^2\Phi_2, \tag{18}$$

$$\Phi_{1t} = -i\left(\lambda^2 - 1 + \frac{1}{4\lambda^2}\right)\Phi_1, \tag{19}$$

$$\Phi_{2t} = i\left(\lambda^2 - 1 + \frac{1}{4\lambda^2}\right)\Phi_2. \tag{20}$$

(17)-(20) сызықты жүйе келесі нақты шешімдерді қабылдайды:

$$\Phi_1 = l_1 e^{-i\lambda^2 x - i\left(\lambda^2 - 1 + \frac{1}{4\lambda^2}\right)t + i\delta_1} = l_1 e^{\theta_1}, \qquad \Phi_2 = l_2 e^{i\lambda^2 x + i\left(\lambda^2 - 1 + \frac{1}{4\lambda^2}\right)t + i\delta_2} = l_2 e^{\theta_2},$$

мұнда $\lambda, l_k, \delta_k (k = 1,2)$ күрделі функциялар, яғни $\lambda = \alpha + i\beta$, $\delta_k = \sigma_k + i\tau_k$, мұнда $\alpha, \beta, \sigma_k, \tau_k$ нақты функциялар. $\theta_2 = -\theta_1$, $\delta_2 = -\delta_1$ делік. Осылайша, θ_1 түрі $\theta_1 = \theta_{1R} + \theta_{1I}$ және θ_{1I} мен θ_{1R} анықтау үшін $1/\lambda^2$ мүше ықшамдалынады $\frac{1}{\lambda^2} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} - \frac{2i\alpha\beta}{\left(\alpha^2 + \beta^2\right)^2}$. Содан кейін θ_1 түрі

$$\theta_1 = -i\alpha^2 x + 2\alpha\beta x - i\beta^2 x - \left(i\alpha^2 - 2\alpha\beta - i\beta^2 - i + \frac{i\left(\alpha^2 - \beta^2\right) + 2\alpha\beta}{4\left(\alpha^2 + \beta^2\right)^2} \right) t + i\sigma_1 - \tau_1.$$

Немесе нақты және жорамал мүшелері жинақтап жазылады, яғни $\theta_1 = \mu + i\chi$. Сонда

$$\mu = 2\alpha\beta x + \left(2\alpha\beta - \frac{\alpha\beta}{2\left(\alpha^2 + \beta^2\right)^2} \right) t - \tau_1,$$

$$\chi = -\left(\alpha^2 - \beta^2\right) x - \left(\alpha^2 - \beta^2 - 1 + \frac{\left(\alpha^2 - \beta^2\right)}{4\left(\alpha^2 + \beta^2\right)^2} \right) t + \sigma_1.$$

Содан кейін

$$\Phi_1 = l_1 e^{\mu + i\chi}, \qquad \Phi_2 = l_2 e^{-\mu - i\chi}, \tag{21}$$

бұл жердегі $l_1 = |l_1| e^{i\gamma_1}$, $\bar{l}_1 = |l_1| e^{-i\gamma_1}$, $l_2 = |l_2| e^{i\gamma_2}$, $\bar{l}_2 = |l_2| e^{-i\gamma_2}$, $\frac{|l|_1}{|l|_2} = e^{2\gamma}$, $\frac{|l|_2}{|l|_1} = e^{-2\gamma}$ және $\gamma_1, \gamma_2, \gamma$ нақты тұрақтылар.

Нөлдік шешімді ескере отырып, (16) теңдеуге $r^{[1]} = \pm\bar{q}^{[1]}$ кезінде (21) теңдеулерді қойғанда, нақты бір солитонды шешім алынады:

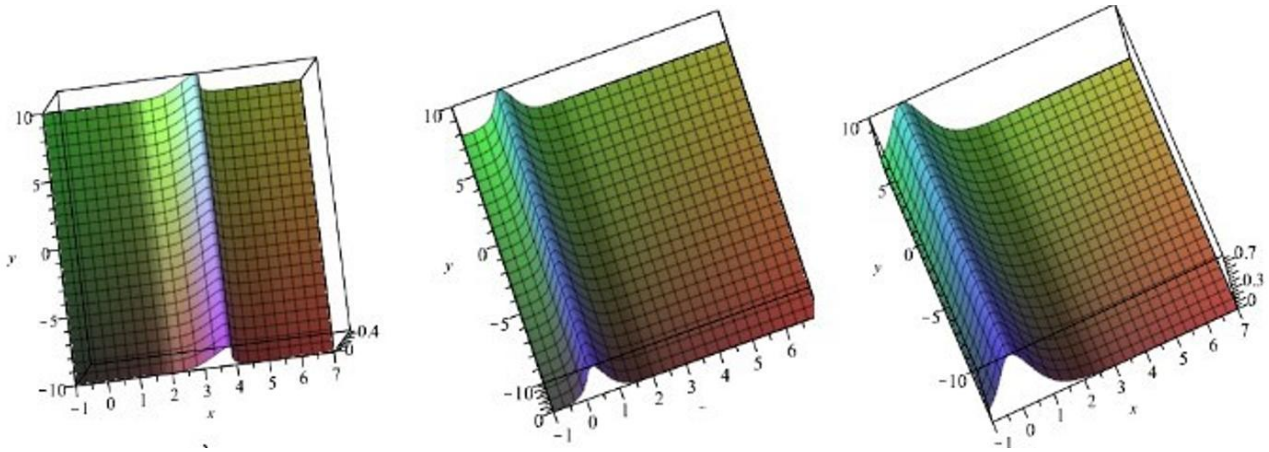
$$q^{[1]} = \frac{-i\beta e^{i(\gamma_1 + \gamma_2)}}{\left(\alpha^2 + \beta^2\right)\cosh 2(\gamma + \mu)}.$$

Алынған солитонды шешім дисперсия мен бейсызықтықтың теңгерілімі нәтижссінде пайда болатын тұрақты локализацияланған толқындық

құрылымды сипаттайды. Оптикалық тұрғыдан бұл шешім ультрақысқа импульстің талшықты ортада пішінің сақтай отырып таралуына сәйкес келеді.

1-суретте ФЛ теңдеуінің бір солитонды шешімнің $\alpha = \beta = \gamma_1 = \gamma = \mu = 1$ және $\gamma_2 = -1$ (а) $t = -3$ (ә) $t = 0$ (б) $t = 1$ кезіндегі графиктері көрсетілген.

Демек, ДТ әдісін қолдану арқылы ФЛ теңдеуі үшін бір солитонды шешім табылды. Алынған нәтижелер көп өлшемді интегралданатын модельдердегі локализацияланған толқындардың динамикасын зерттеуге және күрделі бейсызықты жүйелер үшін нақты солитонды шешімдерді құруға негіз ретінде қолдануға болады.



а ә б

Сурет 1 – ФЛ теңдеуі үшін бір солитонды шешімінің кеңістіктік профилі

1.2 Бірінші типтегі туындылы сызықты емес Шредингер теңдеуі үшін Дарбу түрлендіруі

Бұл бөлімшеде зерттеу объектісі ретінде ТСЕШТ-І теңдеуі қарастырылады. Бұл теңдеу плазмалық, магнитогидродинамикалық және оптикалық ортадағы сызықты емес эффектілерді нақты модельдеуге мүмкіндік береді. Мысалы, ол плазмадағы толқындардың таралуын, ультрақысқа жарық импульстерінің оптикалық талшықтар мен фотондық құрылымдардағы динамикасын сипаттай алады.

ТСЕШТ-І моделі толқындардың өзара әрекеттесуін, дисперсиялық эффектілерді және фокустау құбылыстарын ескере отырып, олардың тұрақтылығын және кеңістіктегі таралуын зерттеуге мүмкіндік береді. Бұл теңдеу физикалық процестерді математикалық тұрғыдан талдауға, сондай-ақ нақты эксперименттік жағдайларды болжауға мүмкіндік беретін тиімді құрал болып табылады.

ТСЕШТ-І моделінің түрі келесідей [51-53]:

$$u_y = -iu_{xx} + (u^2 v)_x, \tag{22}$$

$$v_y = iv_{xx} + (v^2 u)_x, \tag{23}$$

$$u_t = -iu_{xxx} + (u^2 v)_{xx} + iu_x, \tag{24}$$

$$v_t = -iv_{xxx} - (v^2 u)_{xx} + iv_x, \tag{25}$$

мұнда u – күрделі функция ($v = -\bar{u}$), x, y, t индекстер сәйкесінше x, y, t аргументтері бойынша дербес туындылар.

ТСЕШТ-І теңдеуінің ЛК келесідей:

$$\Psi_x = (J\lambda^2 + Q\lambda)\Psi = U\Psi, \tag{26}$$

$$\Psi_y = (\lambda^4 V_4 + \lambda^3 V_3 + \lambda^2 V_2 + \lambda V_1 + V_0)\Psi = V\Psi, \tag{27}$$

$$\Psi_t = (\lambda^6 W_6 + \lambda^5 W_5 + \lambda^4 W_4 + \lambda^3 W_3 + \lambda^2 W_2 + \lambda W_1 + W_0)\Psi = W\Psi, \tag{28}$$

мұнда

$$J = i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & u \\ v & 0 \end{pmatrix}, \qquad V_n = \begin{pmatrix} k_n & m_n \\ l_n & -k_n, \end{pmatrix}, \quad W_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & -a_n \end{pmatrix}.$$

Сондай-ақ (22)-(25) теңдеулер үшін ДТ құрастырылады. Бұл түрлендіру арқылы бір солитонды нақты шешім алынады, ол модельдің интегралданатындығын тікелей көрсетеді және күрделі көп солитонды шешімдерді жүйелі түрде құруға болатын мүмкіндікті дәлелдейді.

ДТ белгілі бір u шешімінің негізінде $u^{[1]}$ жаңа шешім алуға мүмкіндік береді:

$$\Psi^{[1]} = T(\lambda)\Psi, \tag{29}$$

мұнда $T(\lambda)$ матрицасы белгілі шешімге және спектрлік параметрге тәуелді. (29) теңдеудегі $\Psi^{[1]}$ қанағаттандыруын талап етеміз

$$\Psi_x^{[1]} = U^{[1]}\Psi^{[1]}, \qquad \Psi_y^{[1]} = V^{[1]}\Psi^{[1]}, \qquad \Psi_t^{[1]} = W^{[1]}\Psi^{[1]}.$$

Сонымен бірге, $T(\lambda)$ ол қанағаттандыруы керек

$$T_x + TU - U^{[1]}T = 0, \tag{30}$$

$$T_y + TV - V^{[1]}T = 0, \tag{31}$$

$$T_t + TW - W^{[1]}T = 0. \tag{32}$$

Енді T -нің түрі келесідей деп ұйғарылады:

$$T = \lambda I + M, \tag{33}$$

мұнда $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ -\bar{m}_{12} & \bar{m}_{11} \end{pmatrix}$, $M^{-1} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} \bar{m}_{11} & -m_{12} \\ \bar{m}_{12} & m_{11} \end{pmatrix}$ және $m = detN = |m_{11}|^2 + |m_{12}|^2$.

(26)-(28) Лакс теңдеуінің шешімі ретінде $(\psi_1, \psi_2)^T$ алынып, тура есептеулер арқылы да (26)-(28) Лакс теңдеулерінің шешімі $\lambda = \bar{\lambda}_1$ сәйкес келетін $(\bar{\psi}_2, -\bar{\psi}_1)^T$ болып табылатынын көруге болады. Олай болса, келесі ұйғарым қарастырылады:

$$M = -H\Lambda H^{-1},$$

мұнда

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} \psi_1(\lambda_1; t, x, y) & -\bar{\psi}_2(\lambda_1; t, x, y) \\ \psi_2(\lambda_1; t, x, y) & -\bar{\psi}_1(\lambda_1; t, x, y) \end{pmatrix},$$

$$H^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \bar{\psi}_1(\lambda_1; t, x, y) & \bar{\psi}_2(\lambda_1; t, x, y) \\ -\psi_2(\lambda_1; t, x, y) & \psi_1(\lambda_1; t, x, y) \end{pmatrix}, \quad \Delta = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2.$$

Сонымен, M матрицаның түрі

$$M = -\frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \lambda_1 |\psi_1|^2 + \bar{\lambda}_1 |\psi_2|^2 & (\lambda_1 - \bar{\lambda}_1)\psi_1 \bar{\psi}_2 \\ (\lambda_1 - \bar{\lambda}_1)\bar{\psi}_1 \psi_2 & \lambda_1 |\psi_2|^2 + \bar{\lambda}_2 |\psi_1|^2 \end{pmatrix}.$$

(30)-(32) теңдеулерге (33) теңдеуді қойып, λ коэффициенттерді бойынша жіктеп, ықшамдаған соң ДТ алынады

$$u^{[1]} = u + \frac{2i}{\Delta}(\lambda_1 - \bar{\lambda}_1)\psi_1 \bar{\psi}_2, \qquad v^{[1]} = v - \frac{2i}{\Delta}(\lambda_1 - \bar{\lambda}_1)\bar{\psi}_1 \psi_2.$$

1.2.1 Солитонды шешім

ТСЕШТ-I теңдеуінің бір солитонды шешімін табу үшін, жоғарыда құрылған ДТ келесі $u = v = 0$ бастапқы шешім қолданылады. Сонда

$$u^{[1]} = \frac{2i}{\Delta}(\lambda_1 - \bar{\lambda}_1)\psi_1 \bar{\psi}_2, \tag{34}$$

$$v^{[1]} = -\frac{2i}{\Delta}(\lambda_1 - \bar{\lambda}_1)\bar{\psi}_1\psi_2. \qquad (35)$$

Енді бір солитонды шешімді алу үшін меншікті функциялар үшін айқын өрнектер қажет. Олар келесі жүйеден алынады

$$\psi_{1x} = i\lambda^2\psi_1, \quad \psi_{2x} = -i\lambda^2\psi_2, \quad \psi_{1y} = 2i\lambda^4\psi_1,$$
$$\psi_{2y} = -2i\lambda^4\psi_2, \quad \psi_{1t} = (4i\lambda^6 + i\lambda^2)\psi_1, \quad \psi_{2t} = -(4i\lambda^6 + i\lambda^2)\psi_2$$

және түрлері

$$\psi_1 = e^{\left(4i\lambda^6 + i\lambda\right)^2 t + 2i\lambda^4 y + i\lambda^2 x} = e^{\theta_1}, \ \psi_2 = e^{-\left(\left(4i\lambda^6 + i\lambda^2\right)t + 2i\lambda^4 y + i\lambda^2 x\right)} = e^{\theta_2},$$

ондағы $\theta = \theta_1 + i\theta_2, \ \lambda = \alpha + i\beta$ жағдайында қайта жазылады

$$\theta_1 = -24\alpha^5\beta t - 24\alpha\beta^5 t + 80\alpha^3\beta^3 t - 8\alpha^3\beta y + 8\alpha\beta^3 y - 2\alpha\beta x - 2\alpha\beta t,$$
$$\theta_2 = 4\alpha^6 t - 4\beta^6 t + 60\alpha^2\beta^4 t - 60\alpha^4\beta^2 t - 12\alpha^2\beta^2 y + \alpha^2 x - \beta^2 x + \alpha^2 t - \beta^2 t + 2\alpha^4 y + 2\beta^4 y.$$

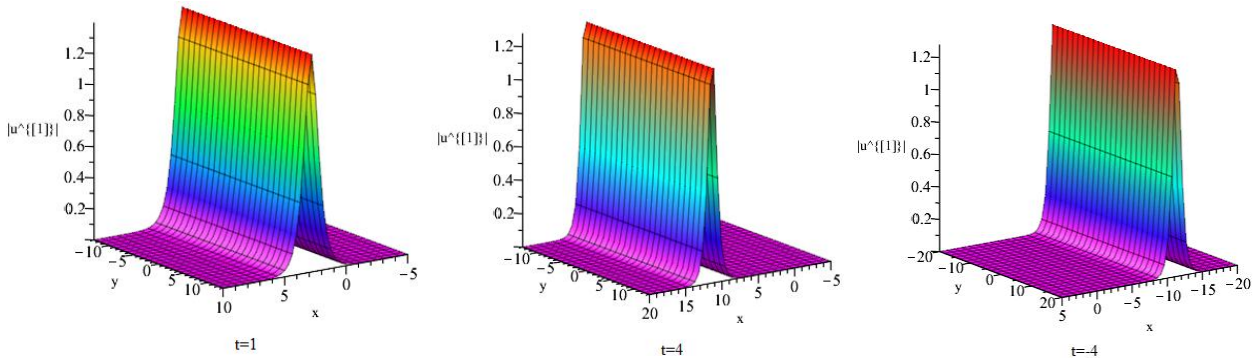
Сонымен

$$\psi_1 = e^{\theta_1 + i\theta_2}, \qquad \psi_2 = e^{-(\theta_1 + i\theta_2)}.$$

Осы теңдеулерді (34) және (35) теңдеулеріне қойып, шығатыны

$$u^{[1]} = -\frac{2\beta e^{2i\theta_2}}{\cosh 2\theta_1} = -2\beta sech(2\theta_1)e^{2i\theta_2},$$
$$v^{[1]} = \frac{2\beta e^{-2i\theta_2}}{\cosh 2\theta_1} = 2\beta sech(2\theta_1)e^{-2i\theta_2}.$$

Осылайша, алынған шешім ТСЕШТ-І үшін бір солитонды нақты шешім болып табылады, ол бастапқы пішінін сақтап, тұрақты түрде таралатын локализацияланған толқын ретінде сипатталады.



а ә б

Сурет 2 – Солитонның әр түрлі уақыт мәндеріндегі эволюциясы

2-суретте ТСЕШТ-I үшін алынған солитонның t=1,4,-4 уақыт мәндеріндегі көрінісі көрсетілген. Шешім анық локализацияланған құрылымды сақтайды және пішінінің тұрақтылығы – солитонның негізгі қасиеті болып табылады. Уақыт өзгерген сайын толқындық шыңы *x* осі бойымен жылжиды, бұл оның профильді бұзбай тұрақты қозғалысын көрсетеді. Амплитуда тұрақты болып қала береді, ал толқын уақыттың кері бағытына қатысты симметрияны сақтайды, бұл теңдеудің интегралданатындығын және құрылған аналитикалық шешімнің дәлдігін дәлелдейді.

Осылайша, графиктер классикалық солитон динамикасын толық көрсетеді: тұрақтылық, локализация және толқын пішінінің уақытқа тәуелсіздігі.

1.3 Жоғары ретті жалпыланған сызықты емес Шредингер теңдеуі: бризерлер және қиратушы толқындар

Осы бөлімшеде уақытқа тәуелді коэффициенттері бар жоғары ретті ЖСЕШТ зерттелінеді, ол дисперсияны, Керр бейсызықтылығын және үшінші ретті дисперсияны ескереді. ДТ арқылы бризерлер мен «қиратушы толқындар» типіндегі нақты шешімдер құрылады, спектрлік параметрдің толқын пішіндерінің әр түрлі түрлері арасындағы ауысуды қалай басқаратынын көрсетеді. Дисперсия толқынның тұрақтылығын және симметриясын анықтаса, бейсызықтық шекті амплитудасы мен енін реттейді, ал үшінші ретті дисперсия асимметрия мен қабықшаның дрейфін тудырады. Спектрлік параметрді өзгерту арқылы солитонды тұрақтандыру немесе тұрақсыздандыруға, локализация орталығын ығыстыруға және кеңістіктік немесе уақыттық дрейфті басқаруға болады, бұл оптикалық талшықтар үшін аса маңызды.

Локализацияланған толқындық құрылымдарға, мысалы бризерлер мен «қиратушы толқындарға», қызығушылық олардың ерекше динамикасымен түсіндіріледі. Бризерлер периодты локализациямен және энергияның тербелмелі алмасуымен сипатталады; әр түрлі түрлері, мысалы Ахмедиев [54] және Кузнецов [55] бризерлері, кеңістіктік және уақыттық қасиеттерімен ерекшеленеді. «Қиратушы толқындар» дисперсия мен бейсызықтықтың теңгерілімін спектрлік параметр арқылы баптау нәтижесінде іргелі солитондардан туындайтын аса күшті локализацияланған құрылымдар [56, 57].

Бір компонентті СЕШТ солитондардың динамикасын басқаруда шектеулі мүмкіндіктерге ие болғандықтан, екі компонентті жүйелерді зерттеу қажеттілігі туындайды. Мұндай жүйелер қосарлы сынатын талшықтардағы оптикалық импульстердің және БЭК-дағы толқындардың таралуын дәлірек сипаттайды. Уақытқа немесе кеңістікке тәуелді еркін параметрлерді енгізу солитондардың локализациясын, амплитудасын және фазалық динамикасын басқаруға, сондай-ақ дрейф пен асимметрияның жаңа әсерлерін бақылауға мүмкіндік береді.

ДТ өздігінен спектрлік параметрге ие болып, басқару тетігі ретінде қызмет етеді: ол әр түрлі бейсызық күйлер арасында ауысуға және локализацияланған құрылымдарды дәл баптауға мүмкіндік береді [58-60]. Дисперсия мен бейсызықтықты модуляциялау толқындарды тұрақтандыру немесе тұрақсыздандыруға, басқарылатын дрейфті қамтамасыз етуге және энергияның тиімді шоғырлануын ұйымдастыруға жаңа мүмкіндіктер береді.

Осылайша, уақытқа тәуелді коэффициенттері бар жоғары ретті ЖСЕШТ локализацияны, тұрақтылықты және сызықты емес толқындардың траекториясын тиімді бақылауға мүмкіндік береді. Бұл теориялық және практикалық тұрғыдан маңызды, себебі ол тұрақты оптикалық импульстерді жобалауға, экстремалды толқын құбылыстарын басқаруға және сызықты емес оптика мен толқын физикасын қолдану мүмкіндіктерін кеңейтуге жағдай жасайды.

Жоғары ретті сызықты емес Шредингер теңдеуі

Қазіргі талшықты-оптикалық жүйелерде оптикалық солитондардың таралуын сипаттайтын ЖСЕШТ келесі түрде жазылады [61-63]

$$i\Psi_t + a_1(t)\Psi_{xx} + \frac{3}{4}a_2(t)\,|\Psi|^2\,\Psi + ia_3(t)\Psi_{xxx} + ia_4(t)\,|\Psi|^2\,\Psi_x + ia_5(t)\,|\Psi|^2\,\bar{\Psi}_x + \\ + V(t,x)\Psi + i\Gamma(t)\Psi = 0, \qquad (36)$$

мұнда $\Psi(x,t)$ – толқынның комплексті қабықшасысы. Уақытқа тәуелді коэффициенттер негізгі физикалық эффектілерді ескереді:

$a_1(t)$ – екінші ретті дисперсия, толқынның таралуын анықтайды;

$a_2(t)$ – Керр бейсызықтығы, өздігінен фазалық модуляцияға жауап береді;

$a_3(t)$ – үшінші ретті дисперсия, ультрақысқа импульстер үшін маңызды.

$V(x,t)$ – кеңістіктік немесе уақыттық біртексіздікті (немесе сыртқы потенциал) сипаттайды, ал $\Gamma(t)$ – жүйедегі күшейту немесе өшуді көрсетеді (оң мән күшейтуді, теріс мән өшуді білдіреді). $a_4(t)$, $a_5(t)$, $V(x,t)$ және $\Gamma(t)$ коэффициенттері басқа параметрлермен келесі түрде байланысты болады:

$$a_4(t) = 3a_5(t), \quad a_5(t) = \frac{9a_2(t)a_3(t)}{8a_1(t)}, \quad V(t,x) = \frac{1}{54}\left(\frac{18x\dot{a}_1(t)}{a_3(t)} - \frac{18xa_1(t)\dot{a}_3(t)}{a_3^2(t)} + \frac{4a_1^3(t)}{a_3^2(t)}\right),$$

$$\Gamma(t) = -\frac{1}{54}\left(\frac{27\dot{a}_1(t)}{a_1(t)} - \frac{27\dot{a}_2(t)}{a_2(t)}\right),$$

мұнда нүкте уақыт бойынша туындыны білдіреді. Бұл теңдеу толқынның дамуы кезінде бейсызықтық, дисперсия және диссипативтік эффектілердің күрделі өзара әрекетін көрсетеді, сондықтан оны бейсызықты оптикада, су толқындарында, БЭК-да және плазмалық толқындарда өзгеріп отыратын физикалық жағдайларды сипаттауда тиімді қолдануға болады.

(36) теңдеудің ЛЖ

$$\Psi_x = U_0\Psi, \quad \Psi_t = V_0\Psi, \tag{37}$$

меншікті мәндері бар спектрлік параметрді $\lambda_{1,2,3}$ енгізу (37) теңдеуді модификацияланған түрге келтіреді

$$\Psi_x = U_0\Psi + \lambda U_1\Psi,$$
$$\Psi_t = V_0\Psi + \lambda V_1\Psi + \lambda^2 V_2\Psi + \lambda^3 V_3\Psi,$$

мұнда

$$U_0 = \begin{pmatrix} 0 & U_0 12 & U_0 13 \\ \bar{U}_0 12 & 0 & 0 \\ \bar{U}_0 13 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_1 = \begin{pmatrix} u_{111} & 0 & 0 \\ 0 & u_{133} & 0 \\ 0 & 0 & u_{133} \end{pmatrix}, \quad V_0 = \begin{pmatrix} 0 & G & \bar{G} \\ \bar{G} & Z & 0 \\ G & 0 & \bar{Z} \end{pmatrix},$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} A & C & \bar{C} \\ -\bar{C} & B & \bar{D} \\ -C & D & B \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 0 & K & \bar{K} \\ -\bar{K} & 0 & 0 \\ -K & 0 & 0 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} v_{311}(t) & 0 & 0 \\ 0 & a_3(t)h + v_{311}(t) & 0 \\ 0 & 0 & a_3(t)h + v_{311}(t) \end{pmatrix},$$

$$\Psi(x,t) = \begin{pmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 & \Psi_3 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \chi_1 & \chi_2 & \chi_3 \end{pmatrix}, \quad \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

бұл жердегі

$$U_0 12 = -\frac{i}{2}\sqrt{\frac{3a_2(t)}{2a_1(t)}}e^{-\frac{ia_1(t)}{3a_3(t)}x}\Psi, \quad U_0 13 = \frac{i}{2}\sqrt{\frac{3a_2(t)}{2a_1(t)}}e^{\frac{ia_1(t)}{3a_3(t)}x}\bar{\Psi},$$

$$G = \frac{i}{2}\sqrt{\frac{3a_2(t)}{2a_1(t)}}e^{-\frac{ia_1(t)}{3a_3(t)}x}\left(\frac{3a_2(t)a_3(t)\,\Psi^2\bar{\Psi}}{2a_1(t)} + \frac{2a_1(t)^2\Psi}{9a_3(t)} - \frac{2i}{3}a_1(t)\,\Psi_x + a_3(t)\Psi_{xx}\right),$$

$$Z = \frac{a_2(t)\left(3a_3(t)\left(\Psi_x\bar{\Psi} - \Psi\bar{\Psi}_x\right) - 2\,ia_1(t)\Psi\bar{\Psi}\right)}{8a_1(t)},$$

$$A = \frac{3a_2(t)a_3(t)(u_{133}\,u_{111})\Psi\bar{\Psi}}{4a_1(t)} - \frac{a_1(t)^2(u_{111} - u_{133})}{3\,a_3(t)} + cv_{133}(t),$$

$$B = \frac{3a_2(t)a_3(t)(u_{111} - u_{133})\Psi\bar{\Psi}}{8a_1(t)} + cv_{133}(t),$$

$$C = \frac{(u_{111} - u_{133})\sqrt{\frac{a_2(t)}{a_1(t)}}e^{-\frac{ixa_1(t)}{3a_3(t)}}\left(a_1(t)\Psi + 3ia_3(t)\Psi_x\right)}{2\sqrt{6}},$$

$$h = (u_{111} - u_{133})^3,\ v_{311}[t] = cv_{133}[t] = 1,$$

$$D = -\frac{3a_2(t)a_3(t)(u_{111} - u_{133})e^{-\frac{2\,i\,x\,a_1(t)}{3a_3(t)}}}{8a_1(t)}\Psi^2,\quad K = \frac{i}{2}\sqrt{\frac{3a_2(t)}{2a_1(t)}}\,a_3(t)(u_{111} - u_{133})^2 e^{-\frac{ia_1(t)}{3a_3(t)}x}\Psi.$$

$\Psi_{xt} = \Psi_{tx}$ үйлесімділік шарты (36) теңдеудің

$$U_{0t} - V_{0x} + [U_0, V_0] = 0, \tag{38}$$

мұнда тік жақшалар коммутаторды білдіреді. (38) теңдеуге U_0 және V_0 матрицаларын қою арқылы (36) теңдеу алынады.

ДТ қолдана отырып, (36) теңдеуінің шешімі итеративті түрде, қарапайым бастапқы шешімнен бастап құрылады. Жаңа шешім келесі түрде болады [64]:

$$U^{[1]} = U_0 + [U_1, \sigma].$$

Спектрлік параметр басқару элементі ретінде әрекет етеді, ол арқылы бризерлер мен «қиратушы толқындар» түрлерін алуға болады, және әрбір шешім дәл болып, жүйенің интегралдылығы сақталады.

Бризерлік шешім

Осы бөлімшеде ДТ әдісі арқылы жоғары ретті ЖСЕШТ үшін нақты бризерлік шешімдер алынады. Бастапқы шешім ретінде жазық толқын қолданылады [65, 66].

$$\Psi_0(x,t) = \exp\left(i\frac{a_1(t)}{3a_3(t)}x\right) / \sqrt{-\frac{a_2(t)}{a_1(t)}}. \tag{39}$$

ДТ әдісін қайталап қолдану арқылы локализацияланған толқындық шешімдер құрылады, нәтижесінде (39) теңдеу үшін бризердің келесі жалпыланған формасы алынады:

$$\psi(x,t)=\psi_0\frac{2Be^{F(x,t)}\cosh(H(x,t))+4\lambda_3u_{111}e^{Z(x,t)}\sinh(M(x,t))-T(x)}{2Be^{F(x,t)}\cosh(H(x,t))+4\lambda_3u_{133}e^{Z(x,t)}\sinh(M(x,t))}. \qquad (40)$$

Бұл жердегі $M(x,t), H(x,t), Z(x,t)$ және $F(x,t)$ функциялары бейсызықтық пен дисперсия динамикасын сипаттайды және келесі түрде анықталады:

$$H(x,t)=A(t)-\frac{1}{12}\int\left(\frac{4\lambda_3u_{133}a_1(t)^2}{a_3(t)}-3Pa_3(t)+W\right)dt+\lambda_3u_{133}x,$$

$$F(x,t)=\frac{1}{12}\int\left(-\frac{4\lambda_3u_{133}a_1(t)^2}{a_3(t)}+3Sa_3(t)+T(t)\right)dt+Bx+\lambda_3u_{133}x,$$

$$M(x,t)=\frac{1}{12}\int\left(-\frac{4\lambda_3u_{133}a_1(t)^2}{a_3(t)}+3Sa_3(t)+T(t)\right)dt+\frac{Bx}{2},$$

$$Z(x,t)=A(t)+\frac{1}{12}\int\left(-\frac{4\lambda_3u_{133}a_1(t)^2}{a_3(t)}+3Pa_3(t)-W\right)dt+\frac{Bx}{2}+2\lambda_3u_{133}x,$$

көмекші функциялар мен тұрақтыларды пайдалана отырып, олар келесі түрде анықталады:

$$T(x)=\lambda_3(u_{133}-u_{111})e^{\frac{Bx}{2}+\lambda_3u_{133}x},\quad A(t)=\int\left(-8\lambda_3^3u_{133}^3a_3(t)+\lambda_3^3+\lambda_3\right)dt,$$

$$S=3B-8B\lambda_3^2u_{133}^2,\quad T(t)=\frac{2a_1(t)^2\left(2\lambda_3u_{133}-B\right)}{a_3(t)},$$

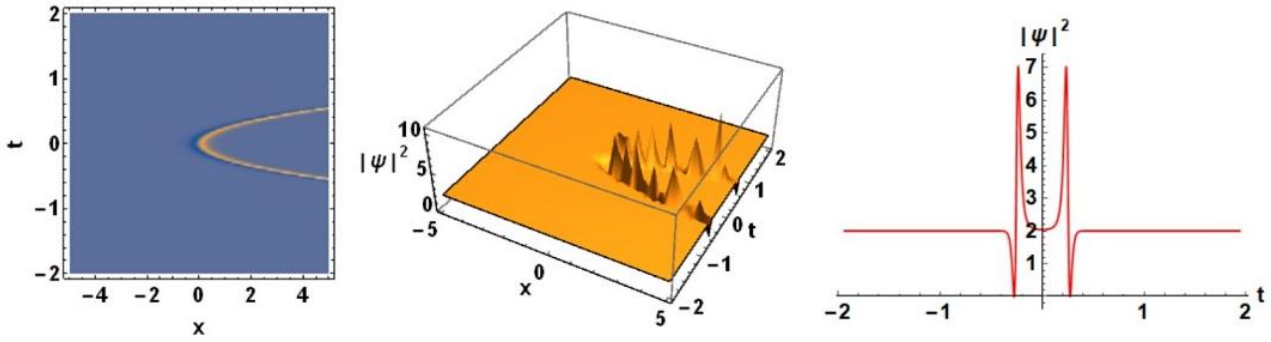
$$W=12\left(\lambda_3^3+\lambda_3\right),\qquad B=\sqrt{4\lambda_3^2u_{133}^2+3},\qquad P=16\lambda_3^3u_{133}^3,$$

мұнда $W, B, P, S, T(x), A(t), T(t)$ параметрлері – бұл комплексті аралық қосымша функциялар, олар соңғы шешімнің кеңістіктік-уақыттық тәуелділігін сипаттайды, соның ішінде жүйенің уақытқа тәуелді коэффициенттері $a_1(t)$, $a_2(t)$ және $a_3(t)$ әсерінен фазаны және амплитуданы модуляциялау. (ζ) меншікті функциялар векторының $\zeta_i(x,t)$ деп белгіленген құрауыштары нақты аналитикалық ДТ шешімдері болып табылады және комплексті экспоненциалдық түрге ие. Бұл функциялар ДТ матрицасын құру үшін қажетті негізгі элементтер болып қызмет етеді.

Жалпы бризер

Жалпы λ_3 мәндері мен $a_1(t), a_2(t)$ және $a_3(t)$ коэффициенттері үшін шешім бризердің кеңейген, біртіндеп өзгеретін динамикасын көрсетеді. 3-суретте $|\psi|^2$ бетінің x және t бойынша профилі берілген. Белгілі бір кеңістіктік нүктеде уақыт бойынша эволюция амплитуданың параболалық модуляциясын

дәл көрсетеді, ал шыңдық аймақтардың үлкейтілген фрагменттері оның тұрақтылығы мен құрылымның сақталуын айқын көрсетеді.



а ә б

а – шешімнің кеңейтілген бірқалыпты өзгеретін контурлық графигі; ә – $|\psi|^2$-тың 3D эволюциясы; б – белгілі бір x үшін $|\psi|^2$-ның уақыт бойынша параболалық эволюциясы

Сурет 3 – $\lambda_3 = \sqrt{2}i/2$ кезіндегі жалпы бризер

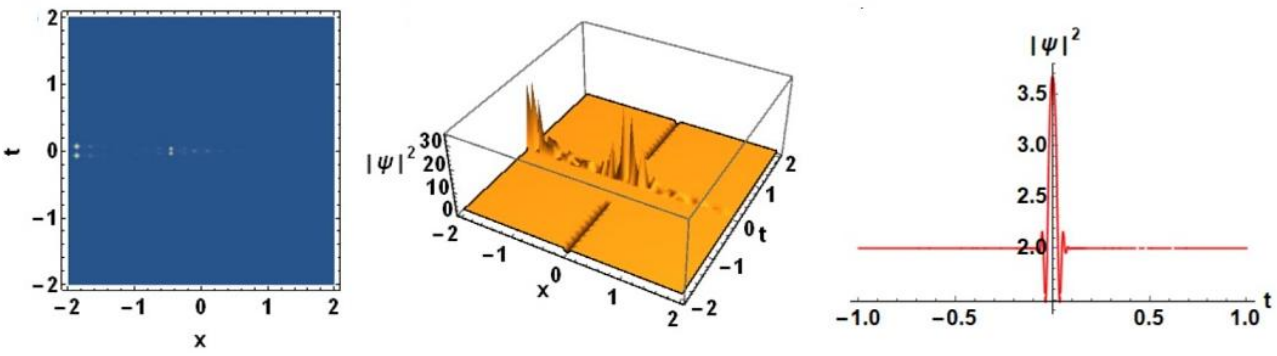
Дербес жағдайда (40) теңдеудегі шешім келесі өрнекке ықшамданады:

$$\psi(x,t) = -\frac{2e^{\frac{2ix}{3}}[-4\sqrt{2}e^{\zeta_1(t,x)} - \beta e^{\zeta_2(t,x)} + 4\sqrt{2}e^{\zeta_3(t)} - \sqrt{35}e^{\zeta_4(x)}]}{(\sqrt{70}-8)e^{\zeta_2(t,x)} + 8e^{\zeta_3(t)} + \sqrt{70}e^{\zeta_4(x)}},$$

мұнда ζ_j – жоғарыда мәтінде анықталған t^2 және x сызықтық комбинациялары және $\beta = 4\sqrt{2} + \sqrt{35}$, ал $\zeta_1 = e^{\frac{1}{24}\left(800\sqrt{2}+191\sqrt{35}\right)t^2 + \frac{1}{2}\left(4\sqrt{2}+\sqrt{35}\right)x}$, $\zeta_2 = e^{\frac{200\sqrt{2}t^2}{3} + \sqrt{35}x}$, $\zeta_3 = e^{\frac{1}{12}\left(800\sqrt{2}+191\sqrt{35}\right)t^2}$ және $\zeta_4 = e^{\left(4\sqrt{2}+\sqrt{35}\right)x}$. Бұл құрылым жүйенің автономиясы жоқ параметрлерінде уақыттық модуляциялар мен кеңістіктік локализацияның бар екенін растайды.

Жалпы бризерден Ма бризеріне ауысу

λ_3 спектрлік параметрді баптау және уақытқа тәуелді коэффициенттерді $a_1(t) = 2t$, $a_2(t) = -t$ және $a_3(t) = t$ ретінде алғанда шешім әр түрлі бризер типтері ауысады. 4-суретте көрсетілгендей, λ_3 мәнінің артуы жалпы бризерді кеңістіктік-периодтық Ма типтегі бризерге ауыстырады, бұл амплитуда локализациясының күшеюімен қатар жүреді. Мұндай механизм сызықты емес толқындарды тиімді басқаруға мүмкіндік береді.



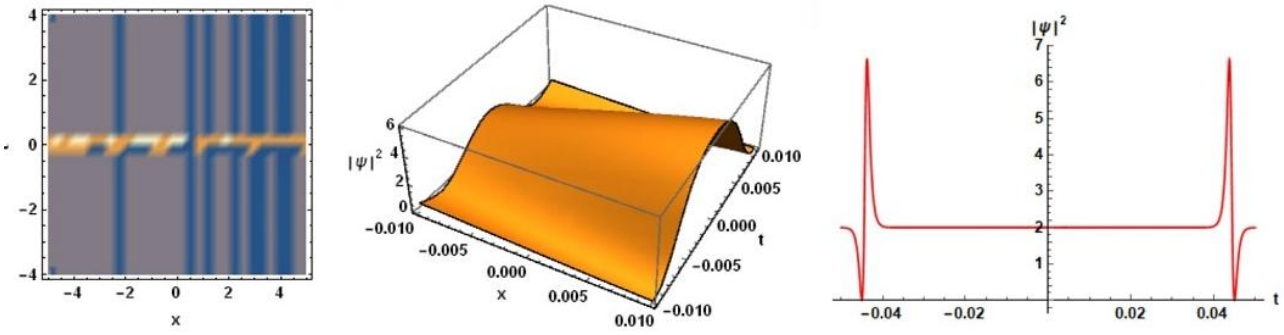
а ә б

а – шешімнің контурлық графигі; ә – $|\psi|^2$-тың 3D графигі; б – белгілі бір x үшін $|\psi|^2$ уақыттық профилі

Сурет 4 – $\lambda_3 = 2i$ кезінде Ма типтегі бризерге ауысу

Ахмедиев бризері

$\lambda_3 = 8i$ кезінде шешім Ахмедиев бризеріне ауысады, ол x бойынша кеңістіктік периодтылықпен және t бойынша локализациямен сипатталады. 5-суретте $|\psi(x,t)|^2$ үшін 3D графигі көрсетілген. Бұл режим импульстерді қалыптастыру және басқаруға бағытталған талшықтық жүйелер үшін практикалық қызығушылық тудырады.



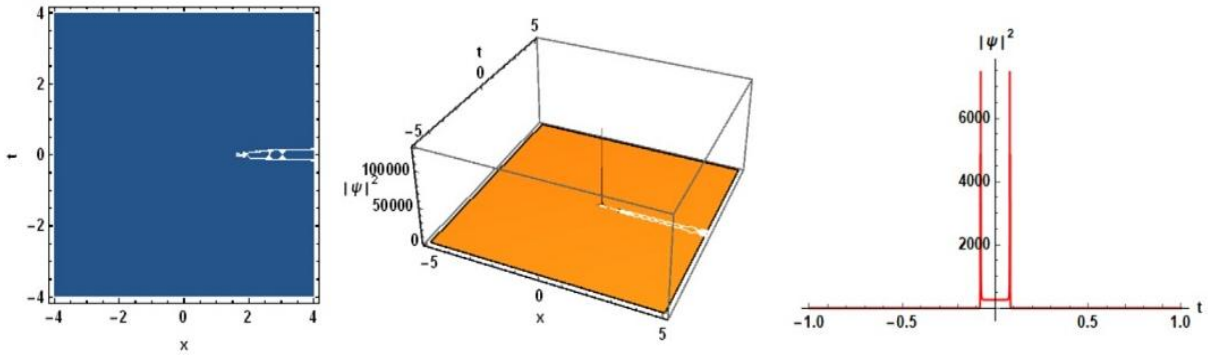
а ә б

а – шешімнің контурлық графигі; ә – $|\psi|^2$-тың 3D графигі; б – белгілі бір x үшін $|\psi|^2$ уақыттық профилі

Сурет 5 – $\lambda_3 = 8i$ кезіндегі Ахмедиев бризері

Қиратушы толқын (Перегрин солитоны)

Спектрлік параметр сындық мәнге жеткенде «қиратушы толқын» типіндегі шешімдер (Перегрин солитоны) қалыптасады, олар амплитуданың кеңістіктік-уақыттық өткір локализациясымен ерекшеленеді (6-сурет). Мұндай құрылымдар оптикалық талшықтарда, су толқындарында және БЭК-да байқалатын экстремалды бейсызық құбылыстарға сәйкес келеді [67-69].



а ә б

а – шешімнің контурлық графигі; ә – $|\psi|^2$-тың 3D графигі; б – белгілі бір x үшін $|\psi|^2$ уақыттық профилі

Сурет 6 – $\lambda_3 = 1$ кезінде «қиратушы толқын» (Перегрин солитоны)

Дисперсия мен бейсызықтықты басқару

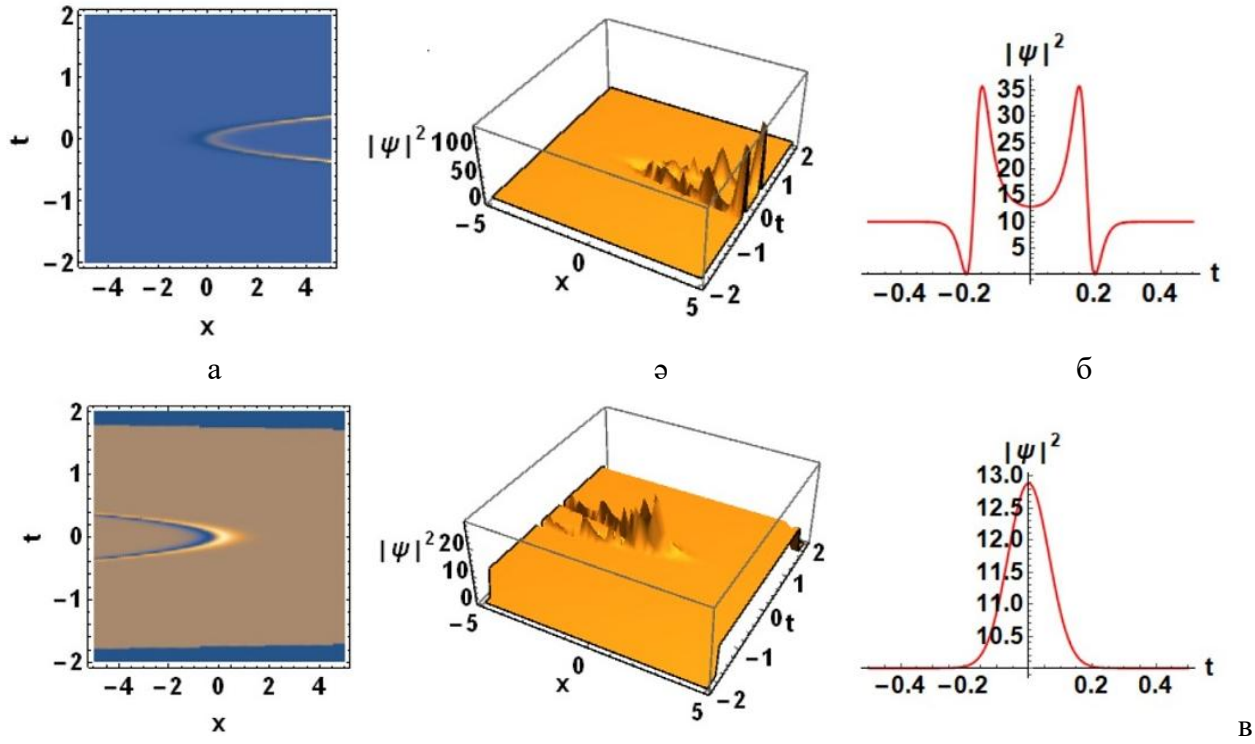
7, 8, 9-суреттердегі нәтижелерді талдау үшін уақытқа тәуелді коэффициенттердің әсерін қысқаша қорытамыз. Үшінші ретті дисперсияны білдіретін $a_3(t)$ коэффициенті бризердің уақыттық ығысуын және асимметриясын басқарады, бұл оның траекториясын дәл реттеуге мүмкіндік береді. Топтық жылдамдық дисперсиясына қатысты $a_1(t)$ коэффициенті дисперсия мен бейсызықтық арасындағы тепе-теңдікті анықтап, толқынның уақыттық немесе кеңістіктік қысқаруын және созылуын белгілейді. Ал бейсызықтық коэффициент $a_1(t)$ тікелей шыңдық амплитуда мен өздігінен фокусқа түсу қарқындылығына әсер етіп, толқын күшін реттеуге және тұрақсыздықтарды басуға мүмкіндік береді.

Көрсетілген $a_1(t)$, $a_2(t)$ және $a_3(t)$ параметрлері талшық үшін нақты өлшенетін шамаларға сәйкес келеді – топтық жылдамдық дисперсиясы (пс²/км), бейсызық коэффициент (Вт$^{-1}$·км$^{-1}$) және үшінші ретті дисперсия (пс³/км). Сол себепті олардың үйлестірілген баптауы локализацияны, траекторияны және бейсызық толқындардың тұрақтылығын басқарудың физикалық мағынасы бар механизмін береді, бұл суреттерде байқалатын айырмашылықтарды түсіндіреді.

Кейінгі талдауда уақытқа тәуелді коэффициенттерді өзгертіп, спектрлік параметрді $\lambda_3 = \sqrt{2}i / 2$ тұрақты мәнде қалдырамыз.

Алдағы талдауда уақытқа тәуелді коэффициенттерді өзгертіп, спектрлік параметрді тұрақты деңгейде ұстаймыз.

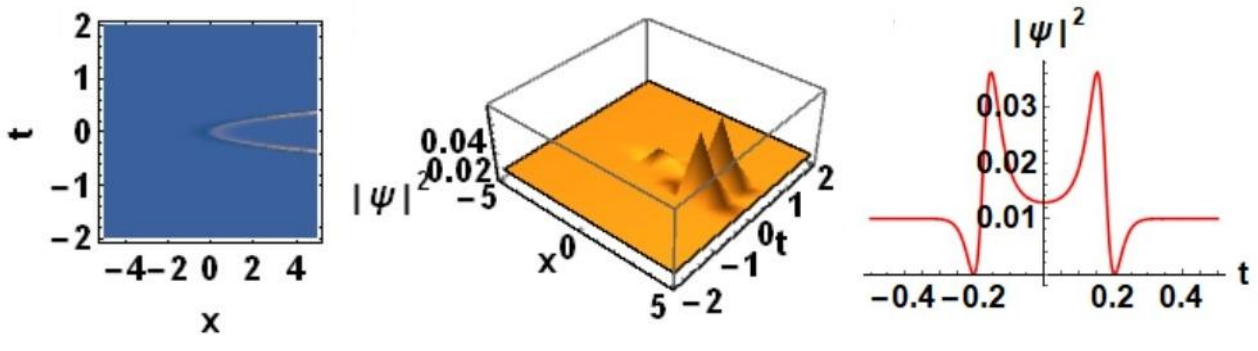
7-суреттен көрінетіндей, $a_3(t)$-ны $10t$-дан $-10t$-ға өзгерту локализация мен амплитуданың төмендеуіне әкеледі, ал оның таңбасын ауыстыру бризердің кеңістіктік дрейфін туындатады. Осылайша, $a_3(t)$ локализацияланған құрылымдардың формасын өзгертпей, олардың орнын басқарудың тиімді құралы болып табылады.



а, ә, б – $a_3(t) = 10t$; в, г, ғ – $a_3(t) = -10t$

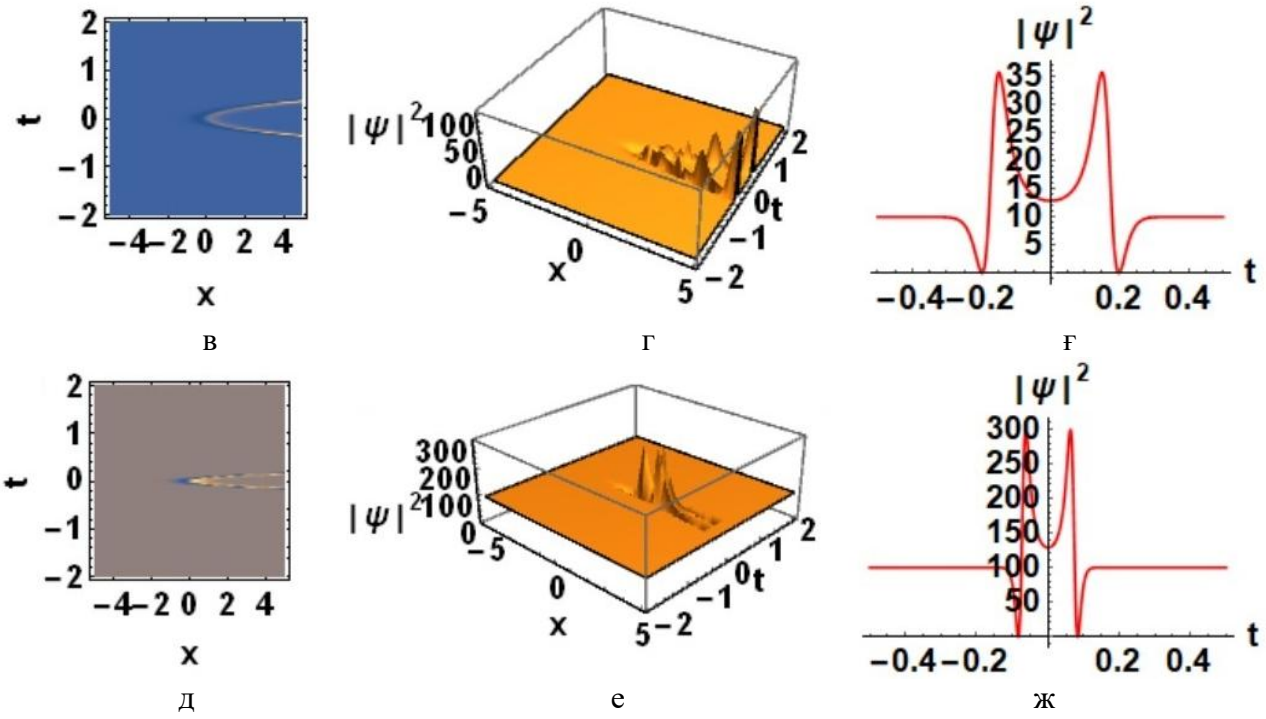
Сурет 7 – $\lambda_3 = \sqrt{2}i/2$ кезінде уақытқа тәуелді коэффициенттердің бризерлер эволюциясына әсері, $a_1(t) = 10t$ және $a_2(t) = -t$

Солитондардың локализациясы тек дисперсия мен бейсызықтықтың дәл балансына жеткенде ғана мүмкін болады. 8, 9-суреттерде көрсетілген нәтижелер $a_1(t)$ және $a_2(t)$ коэффициенттерін өзгерту солитондардың тұрақсыздығын күшейтуге де, тұрақтандыруға да әкелуі мүмкін екенін көрсетеді.



а, ә, б – $a_1(t) = 0.01t$

Сурет 8 – $\lambda_3 = \sqrt{2}i/2$, $a_3(t) = 10t$ және $a_2(t) = -t$ кезінде уақытқа тәуелді $a_1(t)$ коэффициенттің әсері, парақ 1

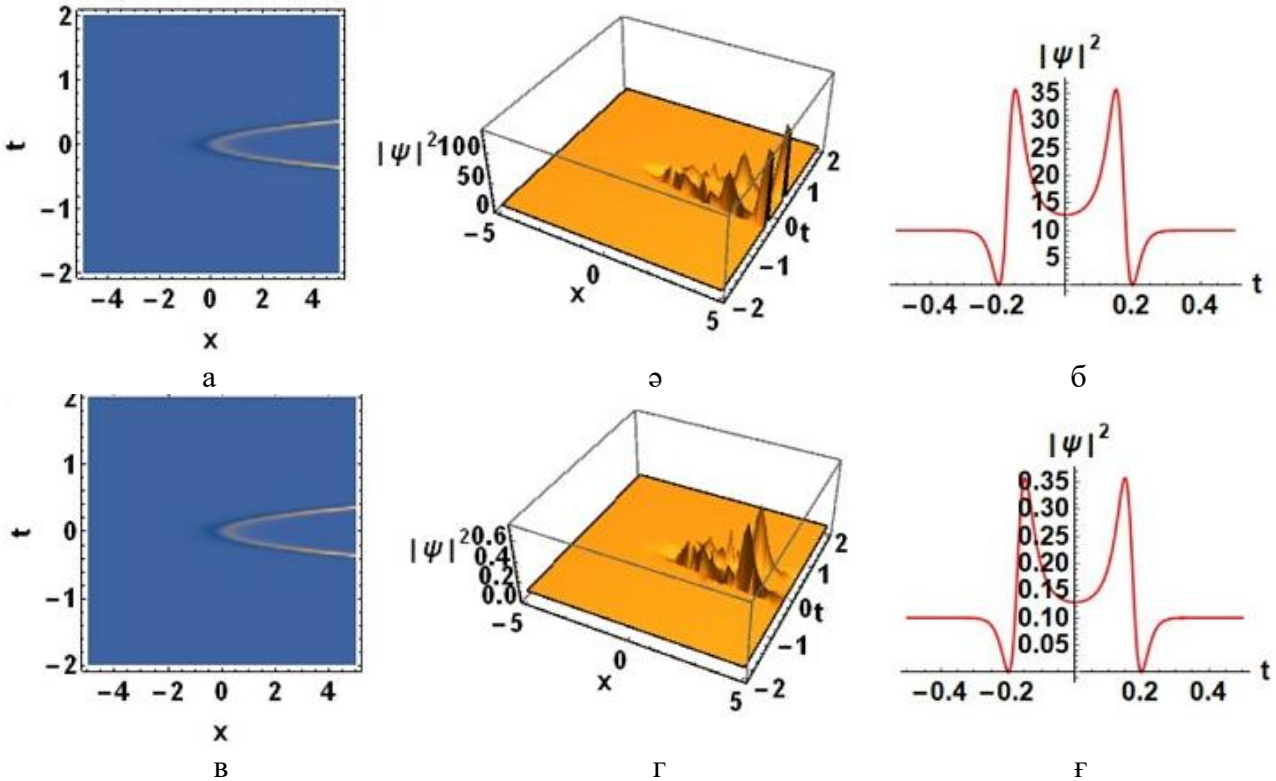


в г ғ

д е ж

в, г, ғ – $a_1(t) = 10t$; д, е, ж – $a_1(t) = 100t$

Сурет 8, парақ 2



а ә б

в г ғ

а, ә, б – $a_2(t) = -t$; в, г, ғ – $a_2(t) = -100t$

Сурет 9 – $\lambda_3 = \sqrt{2}i/2$, $a_3(t) = 10t$ және $a_1(t) = 10t$ кезінде уақытқа тәуелді $a_2(t)$ коэффициенттің әсері

Жүргізілген зерттеу көрсеткендей, жалпы Шредингер теңдеуінде өздігінен емес (неавтономды) дисперсияны, бейсызықтықты және жоғары ретті эффектілерді басқару энергияның локализациясын, тұрақтылығын және бейсызық толқындық құрылымдардың кеңістіктік-уақыттық эволюциясын тиімді және физикалық тұрғыдан негізделген түрде бақылауға мүмкіндік береді. Екінші және үшінші ретті дисперсия коэффициенттері мен Керр бейсызықтығының уақытқа тәуелді модуляциясы бризерлерді, солитондарды және «қиратушы толқындарды» мақсатты түрде қалыптастыруға және басқаруға жол ашады, бұл олардың тұрақтандырылуын немесе бақылаумен тұрақсыздандырылуын қамтамасыз етеді. Спектрлік параметр негізгі басқарушы айнымалы ретінде әр түрлі бейсызық режимдер арасында біртіндеп ауысуларды қамтамасыз етеді, ал жоғары ретті эффектілер толқын пішінінің бүтіндігін бұзбай асимметрияны және бақыланатын дрейфті жүзеге асыруға мүмкіндік береді. Алынған аналитикалық нәтижелер, тұрақтылықтың сандық талдаумен расталуы арқасында, оптикалық талшықтарда, БЭК-да, плазмалық және гидродинамикалық жүйелерде басқарылатын бейсызық күйлерді жобалаудың әмбебап теориялық негізін құрайды.

1.4 Фокас-Ленэллс теңдеуінің спиндік жүйесінің шешімдері

Бұл бөлімшеде интегралданатын ФЛ теңдеуіне калибрлік эквивалентті спиндік жүйе және оның ЛК ұсынылады. Сондай ақ, жаңа спиндік жүйенің әр түрлі шешімдері құрылады.

1.4.1 Спиндік жүйе

Спиндік жүйес құру үшін алдымен оның ЛЖ табу керек. Келесі түрлендіру қарастырылады [70-73]:

$$\Phi = g^{-1}\Psi, \quad g = \Psi|_{\lambda=\lambda_0},$$

мұнда $g(x,t)$ – калибрлік түрлендірудің унитарлы 2×2 матрицасы.

Аргументке қатысты Ф векторлық функцияның x және t бойынша туындылары табылады

$$\Phi_x = (g^{-1}\Psi_x - g^{-1}g_x g^{-1})\Psi = U'\Phi, \tag{41}$$

$$\Phi_t = (g^{-1}\Psi_t - g^{-1}g_t g^{-1})\Psi = V'\Phi. \tag{42}$$

Біріккен теңдеулер жүйесін қанағаттандыратын $g(x,t)$ унитарлы матрицаны $g_x = U_0 g$, $g_t = Wg$ деп таңдайық. Мұндағы $U_0(x,t)$ және $W(x,t)$ нөлдік қисықтық шартын қанағаттандыратын антиэрмиттік матрицалар

$$U_0(x,t) = -i\lambda_0^2\sigma_3 + \lambda_0 Q, \quad W(x,t) = -i\lambda_0^2\sigma_3 + \lambda_0 Q + V_0 + \frac{1}{\lambda_0}V_{-1} - \frac{i}{4\lambda_0^2}\sigma_3,$$

мұнда λ_0 – тұрақты. Осыдан (41) және (43) ескере отырып, алынады

$$\Phi_x = \left(-i(\lambda^2 - \lambda_0^2)g^{-1}\sigma_3 g + (\lambda - \lambda_0)g^{-1}Qg\right)\Phi,$$

$$\Phi_t = \left(-i(\lambda^2 - \lambda_0^2)g^{-1}\sigma_3 g + (\lambda - \lambda_0)g^{-1}Qg + \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right)g^{-1}V_{-1}g - \frac{i}{4}\left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_0^2}\right)g^{-1}\sigma_3 g\right)\Phi,$$

бұл жерде $g^{-1}\sigma_3 g = A$ екені белгілі, мұндағы A – A_1, A_2, A_3 құраушылы $\boldsymbol{A}$ спиндік вектордың балама спиндік матрицасы.

Кейбір күрделі есептеулер мен түрлендірулерден кейін ізделінді спиндік жүйенің шешімдері мен (4) және (5) теңдеулер жүйесі арасындағы байланысты келесідей шығады:

$$g^{-1}Qg = \frac{1}{2\lambda_0}AA_x, \quad g^{-1}V_{-1}g = \frac{\lambda_0}{2}(AA_t - AA_x).$$

Енді (41) және (42) теңдеулер жүйесінің түрлері

$$\Phi_x = \left(-i(\lambda^2 - \lambda_0^2)A + \frac{\lambda - \lambda_0}{2\lambda_0}AA_x\right)\Phi = U'\Phi, \tag{43}$$

$$\Phi_t = \left(-i\left(\lambda^2 - \lambda_0^2 + \frac{1}{4\lambda^2} - \frac{1}{4\lambda_0^2}\right)A + \left(\frac{\lambda}{2\lambda_0} - \frac{\lambda_0}{2\lambda}\right)AA_x + \left(\frac{\lambda_0}{2\lambda} - \frac{1}{2}\right)AA_t\right)\Phi = V'\Phi. \tag{44}$$

Бұнда

$$U' = -i(\lambda^2 - \lambda_0^2)A + \frac{(\lambda - \lambda_0)}{2\lambda_0}AA_x, \tag{45}$$

$$V' = -i\left(\lambda^2 - \lambda_0^2 + \frac{1}{4\lambda^2} - \frac{1}{4\lambda_0^2}\right)A + \left(\frac{\lambda}{2\lambda_0} - \frac{\lambda_0}{2\lambda}\right)AA_x + \left(\frac{\lambda_0}{2\lambda} - \frac{1}{2}\right)AA_t. \tag{46}$$

Демек, жаңа ЛК алынды.

(43) және (44) ЛК-ін айқас дифференциалдау арқылы нөлдік қисықтық шартын $U_t' - V_x' + [U', V'] = 0$ аламыз. Қисықтық шартын есептеу арқылы келесі түрдегі қажетті спиндік жүйе алынады [74]:

$$iA_t + \frac{1}{4\lambda_0^2}[A, A_{xx} - A_{xt}] + \frac{i(1-4\lambda_0^3)}{4\lambda_0^3} A_x = 0. \qquad (47)$$

(47) теңдеуді A спиндік матрицаның құрауыштары арқылы

$$iA_{3t} + \frac{1}{4\lambda_0^2}(A^- A_{xx}^+ - A^- A_{xt}^+ - A_{xx}^- A^+ + A_{xt}^- A^+) + \frac{i(1-4\lambda_0^3)}{4\lambda_0^3} A_{3x} = 0,$$
$$iA_t^- - \frac{1}{2\lambda_0^2}(A^- A_{3xx} - A^- A_{3xt} - A_3 A_{xx}^- + A_3 A_{xt}^-) + \frac{i(1-4\lambda_0^3)}{4\lambda_0^3} A_x^- = 0,$$
$$iA_t^+ + \frac{1}{2\lambda_0^2}(A^+ A_{3xx} - A^+ A_{3xt} - A_3 A_{xx}^+ + A_3 A_{xt}^+) + \frac{i(1-4\lambda_0^3)}{4\lambda_0^3} A_x^+ = 0,$$

жазуға болады. Сонымен бірге, $\boldsymbol{A}$ спин векторының құрауыштары арқылы да жазуға болады

$$A_{1t} + \frac{1}{2\lambda_0^2}(A_2 A_{3xx} - A_{2xx} A_3) - \frac{1}{2\lambda_0^2}(A_2 A_{3xt} - A_{2xt} A_3) + \frac{(1-4\lambda_0^3)}{4\lambda_0^3} A_{1x} = 0,$$
$$A_{2t} + \frac{1}{2\lambda_0^2}(A_3 A_{1xx} - A_{3xx} A_1) - \frac{1}{2\lambda_0^2}(A_3 A_{1xt} - A_{3xt} A_1) + \frac{(1-4\lambda_0^3)}{4\lambda_0^3} A_{2x} = 0,$$
$$A_{3t} + \frac{1}{2\lambda_0^2}(A_1 A_{2xx} - A_{1xx} A_2) - \frac{1}{2\lambda_0^2}(A_1 A_{2xt} - A_{1xt} A_2) + \frac{(1-4\lambda_0^3)}{4\lambda_0^3} A_{3x} = 0.$$

Сонымен (47) теңдеу (1+1)-өлшемді ФЛ теңдеуінің спиндік жүйесі болып табылады. Алынған нәтижелер спиндік жүйелерді әрі қарай зерттеуге, олардың дәл шешімдерін табуға және физикалық қолданбаларда пайдалануға мүмкіндік береді. Келесі бөлімшелерде осындай шешімдерді қарастыратын боламыз.

1.4.2 Қума толқын шешімі

Қума толқын шешімдері – бұл өз пішінін сақтай отырып, тұрақты жылдамдықпен таралатын локализацияланған толқындар. Олар сызықты емес оптика, спиндік жүйелер және магниттік орта сияқты әртүрлі физикалық салаларда маңызды рөл атқарады.

Спин векторының бұрыштық параметризациясы қарастырылады [75-78]

$$A^+ = \sin\theta e^{i\phi}, \qquad A^- = \sin\theta e^{-i\phi}, \qquad A_3 = \cos\theta, \qquad (48)$$

мұнда $\theta(x,t)$ және $\phi(x,t)$ – бірлік сферадағы спин векторының бағытталуын сипаттайтын нақты мәнді функциялар. Бұл параметризация спин векторының бірлік сферадағы қозғалысын сипаттайды. Осы параметриязацияны (47) теңдеудің A спиндік матрицаның құрауыштары арқылы жазылған теңдеуіне

қойып, алгебралық түрлендірулерді қолдану арқылы келесі теңдеулер жүйесі алынады:

$$\theta_t = b\left(\phi_{xx}\sin\theta + 2\phi_x\theta_x\cos\theta - \phi_{xt}\sin\theta - \phi_x\theta_t\cos\theta - \theta_x\phi_t\cos\theta\right) - (b^2-1)\theta_x, \quad (49)$$

$$\phi_t = b\left(\frac{\theta_{xt}}{\sin\theta} - \frac{\theta_{xx}}{\sin\theta} + \phi_x^2\cos\theta - \phi_x\phi_t\cos\theta\right) - (b^2-1)\phi_x. \quad (50)$$

Қума толқынның қажетті шешімдері келесі комбинацияға тәуелді деп қабылданады:

$$\xi = x - vt, \quad (51)$$

мұнда v бұл толқынның таралу жылдамдығы.

(51) теңдеуді ескере отырып, (49), (50) теңдеулерді келесі түрде қайта жазылады

$$-v\theta' = b\left(\phi''\sin\theta + 2\phi'\theta'\cos\theta + v\phi''\sin\theta + v\phi'\theta'\cos\theta + v\theta'\phi'\cos\theta\right) - (b^2-1)\theta'. \quad (52)$$

$$-v\phi' = b\left(-\frac{v\theta''}{\sin\theta} - \frac{\theta''}{\sin\theta} + \phi'^2\cos\theta + v\phi'^2\cos\theta\right) - (b^2-1)\phi'. \quad (53)$$

Сол сияқты, (53) теңдеуден алынады

$$\phi' = \frac{a\cos\theta - C_1}{(1+v)\sin^2\theta}, \quad (54)$$

мұнда $a = \dfrac{1-b^2+v}{b}$ және C_1 тұрақтылар. Оған $\omega = \cos\theta$ алмастыруын енгізіп, интегралданылады

$$\phi = C_7 + \frac{(p-\bar{C}_1)}{2}\int\frac{d\xi}{1-\omega} - \frac{(p+\bar{C}_1)}{2}\int\frac{d\xi}{1+\omega},$$

бұл жерде $p = \dfrac{a}{1+v}$, $\bar{C}_1 = \dfrac{C_1}{1+v}$ және C_7 интегралдау тұрақтысы.

(54) теңдеуді (52) теңдеуге қойғанда, келесі нәтиже шығады:

$$\theta' = \pm\frac{1}{(1+v)\sin\theta}\sqrt{2aC_1\cos\theta - a^2 - C_1^2 + C_2\sin^2\theta},$$

мұнда C_2 интегралдау тұрақтысы. оны $\sin\theta$-ға көбейтіп, $\omega = \cos\theta$ алмастыруы енгізіледі

$$\omega' = \pm\frac{1}{(1+v)}\sqrt{a^2 - 2aC_1\omega + C_1^2 - C_2\omega^2}. \qquad (55)$$

(55) теңдеуді интегралдағанда, ω үшін келесі өрнектер алынады:

$$\omega = \frac{\sqrt{C_2 m - a^2 C_1^2}}{C_2}\sinh\left(\sqrt{C_2}\left(C_3 - C_6 \pm \frac{\xi}{1+v}\right)\right) + \frac{aC_1}{C_2}, \quad C_2 > 0, \quad \Delta > 0,$$

$$\omega = \frac{\sqrt{C_2 m - a^2 C_1^2}}{C_2}\sinh\left(\sqrt{C_2}\left(C_3 - C_6 \pm \frac{\xi}{1+v}\right)\right) + \frac{aC_1}{C_2}, \quad C_2 < 0, \quad \Delta < 0,$$

$$\omega = \frac{\sqrt{C_2 m - a^2 C_1^2}}{C_2}\sinh\left(\sqrt{C_2}\left(C_3 - C_6 \pm \frac{\xi}{1+v}\right)\right) + \frac{aC_1}{C_2}, \quad C_2 < 0,$$

$$\omega = \frac{e^{\sqrt{C_2}\left(C_3 - C_6 \pm \frac{\xi}{1+v}\right)}}{C_2} + \frac{aC_1}{C_2}, \quad C_2 < 0, \quad \Delta = 0.$$

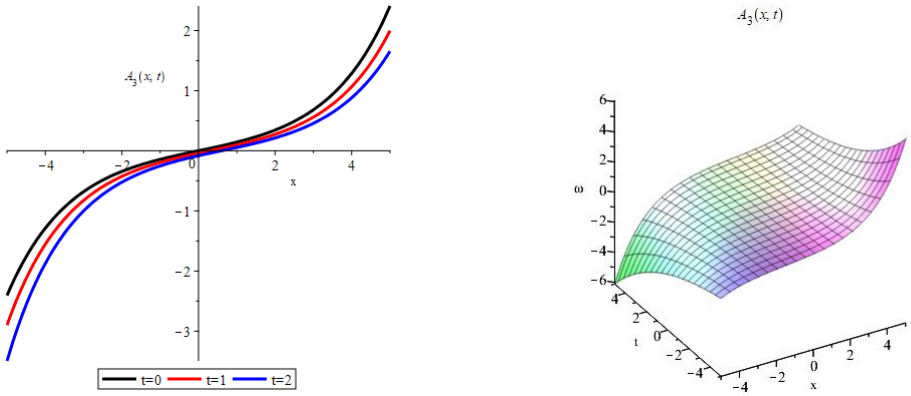
Бұл жердегі, $m = a^2 + C_1^2 - C_2$, $\Delta = 4C_2 m - 4a^2 C_1^2$ және C_3 интегралдау тұрақтысы.

Осылайша, $\theta(x,t)$ функциясы $\omega(x,t)$ арқылы айқын түрде беріледі, және бұл өрнекті (48) теңдеуге қойғанда, спин векторының құрауыштарының соңғы түрі алынады:

$$A^+ = \sqrt{1-\omega^2}\,e^{i\phi}, \qquad A^- = \sqrt{1-\omega^2}\,e^{-i\phi}, \qquad A_3 = \omega.$$

Немесе

$$A_1 = \sqrt{1-\omega^2}\cosh i\phi = \sqrt{1-\omega^2}\cos\phi,$$
$$A_2 = -i\sqrt{1-\omega^2}\sinh i\phi = \sqrt{1-\omega^2}\sin\phi,$$
$$A_3 = \omega.$$



а ә

а – $A_3(x,t)$-тің 2D графигі; ә – $A_3(x,t)$-тің 3D графигі

Сурет 10 – Әр түрлі уақыт мәндері үшін A_3 құраушының 2D және A_3 құраушының 3D графиктері

Ескерту – Параметрлер: $b=0.8,\quad \nu=0.3,\ C_1=0.05,\ C_2=0.08,\ C_3=C_6=0,$ $x\in[-5,5]$ және $t\in[-5,5]$

Сонымен ФЛ теңдеуінің спиндік жүйесінің қума толқын шешімі алынды. 10-суретте алынған $A_3(x,t)$ шешімінің графиктері қума толқынның фронттық түріне тән сипатта, яғни профиль уақыт бойынша өзгермей тек x осі бойымен ығысады. Келесі бөлімшеде осы зерттеулер жалғастырылып, ДТ арқылы нақты шешімдер алынады.

1.4.3 Дарбу түрлендіруі

(47) теңдеу калибрлік түрлендіру арқылы алынып, оның сәйкес ЛЖ құрылды. Бұл бөлімшеде аталған ЛЖ-н пайдаланып, ДТ-ді құрылады және оған сәйкес келетін солитонды шешімі шығарылады.

1-ретті ДТ. (47) теңдеу үшін ДТ құру басталады

$$\Phi_x^{[1]} = U_1^{[1]}\Phi^{[1]}, \tag{56}$$

$$\Phi_t^{[1]} = V_1^{[1]}\Phi^{[1]}, \tag{57}$$

мұнда $U_1^{[1]} = (T_x^{[1]} + T^{[1]}U_1)(T^{[1]})^{-1},\quad V_1^{[1]} = (T_t^{[1]} + T^{[1]}V_1)(T^{[1]})^{-1}.$

$\Phi^{[1]}$ функциясы $\Phi^{[1]} = T^{[1]}\Phi$ түрінде, ал ондағы $T^{[1]}$ операторы келесідей анықталады:

$$T^{[1]} = \lambda N_1 + M_1 + \lambda^{-1}K_1. \tag{58}$$

Бұл жердегі $N_1 = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix}$, $M_1 = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$, $K_1 = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}$, яғни мұндағы n_{ij}, m_{ij} және k_{ij} $(i, j = 1, 2)$ – анықталуы қажет x және t функциялары.

(56) және (57) теңдеулердің үйлесімділік шартынан келесі қатынастар алынады:

$$T_x^{[1]} + T^{[1]}U_1 = U_1^{[1]}T^{[1]}, \tag{59}$$

$$T_t^{[1]} + T^{[1]}V_1 = V_1^{[1]}T^{[1]}. \tag{60}$$

(45), (46) және (58) теңдеулерді (59) және (60) теңдеулерге қойып, λ дәрежелерінің коэффициенттерін салыстыру арқылы келесі қатынас алынады [79]:

$$A^{[1]} = N_1 A N_1^{-1}. \tag{61}$$

2-ретті ДТ. 2-ретті ДТ 1-ретті түрлендіруді екі рет қолдану арқылы алынады, нәтижесінде:

$$\Phi^{[2]} = T^{[2]}\Phi, \qquad T^{[2]} = (\lambda N_2 + M_2 + \lambda^{-1}K_2)(\lambda N_1 + M_1 + \lambda^{-1}K_1).$$

Көбейткішті ашу арқылы λ бойынша Лоран полиномы алынады

$$T^{[2]}(\lambda) = \lambda^2 T_2^{[2]} + \lambda T_1^{[2]} + T_0^{[2]} + \lambda^{-1}T_{-1}^{[2]} + \lambda^{-2}T_{-2}^{[2]}.$$

Мұндай түрлендіру ЛЖ-да λ және λ^{-1} екеуіде симметриялы пайда болатын жүйелерде өздігінен туындайды.

2-ретті детерминанттық нақты өрнек келесі түрде беріледі:

$$T^{[2]}(\lambda) = \lambda^2 I + t_1^{[2]}\lambda + t_0^{[2]} + t_{-1}^{[2]}\lambda^{-1} + t_{-2}^{[2]}\lambda^{-2}.$$

Бұл әдіс қарапайым немесе белгілі бастапқы шешімдерден солитонды және позитон типіндегі шешімдерді алуға мүмкіндік береді.

N-ретті ДТ. N-ретті ДТ 1-ретті түрлендіруді қайталамалы қолдану арқылы құрылады.

$$\Phi^{[n]} = T^{[n]}\Phi, \qquad T^{[n]} = T_n^{[1]}T_{n-1}^{[1]}\cdots T_1^{[1]},$$

мұнда әрбір көбейткіш келесі формада беріледі: $T_k^{[1]} = \lambda N_k + M_k + \lambda^{-1}K_k$.

$T^{[n]}$ жалпы Лоран полиномдық форманың түрі

$$T^{[n]}(\lambda) = \sum_{j=-n}^{n} \lambda^j T_j^{[n]},$$

матрица коэффициенттері үшін рекурсивтік қатынасымен:

$$T_j^{[n]} = N_n T_{j-1}^{[n-1]} + M_n T_j^{[n-1]} + K_n T_{j+1}^{[n-1]}.$$

$T^{[n]}$ детерминанттық өрнегі меншікті функциялар мен меншікті мәндердің $2n \times 2n$ блок-матрицаларын қамтиды.

1.4.4 Солитонды шешім

Енді ФЛ теңдеуінің спіндік жүйесі үшін ДТ-ді айқын түрде жазуға дайынбыз. N матрицасының келесі формаға ие екені көрсетіледі:

$$N_1 = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ -\bar{n}_{12} & \bar{n}_{11} \end{pmatrix}, \quad N_1^{-1} = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} \bar{n}_{11} & -n_{12} \\ \bar{n}_{12} & n_{11} \end{pmatrix}, \quad n = \det N_1 = |n_{11}|^2 + |n_{12}|^2 .$$

Нәтижесінде (61) теңдеудің түрі

$$A^{[1]} = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} A_3(|n_{11}|^2 - |n_{12}|^2) + A^- n_{11}\bar{n}_{12} + A^+ \bar{n}_{11} n_{12} & A^- n_{11}^2 - A^+ n_{12}^2 - 2A_3 n_{11} n_{12} \\ A^+ n_{11}^{*2} - A^- \bar{n}_{12}^2 - 2A_3 \bar{n}_{11}\bar{n}_{12} & A_3(|n_{12}|^2 - |n_{11}|^2) - A^- n_{11}\bar{n}_{12} - A^+ \bar{n}_{11} n_{12} \end{pmatrix}.$$

Келесідей ұйғарылады

$$N_1 = H\Lambda^{-1}H^{-1}, \quad N_1^{-1} = H^{-1}\Lambda H, \tag{62}$$

мұнда H бұл меншікті функциялар матрицасы.

$$H = \begin{pmatrix} \Phi_1(\lambda_1, t, x) & -\bar{\Phi}_2(\lambda_1, t, x) \\ \Phi_2(\lambda_1, t, x) & \bar{\Phi}_1(\lambda_1, t, x) \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \tag{63}$$

Бұл жердегі $\Delta = |\Phi_1|^2 + |\Phi_2|^2$ және $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}$. (63) теңдеуді (62) теңдеуге қойғанда, келесі нәтиже шығатыны

$$N_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \lambda^{-1}|\Phi_1|^2 + (\bar{\lambda})^{-1}|\Phi_2|^2 & (\lambda^{-1} - (\bar{\lambda})^{-1})\Phi_1\bar{\Phi}_2 \\ (\lambda^{-1} - (\bar{\lambda})^{-1})\bar{\Phi}_1\Phi_2 & \lambda^{-1}|\Phi_2|^2 + (\bar{\lambda})^{-1}|\Phi_1|^2 \end{pmatrix}. \tag{64}$$

Осы (64) теңдеуді (61) теңдеуге қойғанда, мұндағы бастапқы шешім $A = \sigma_3$ болса,

$$A^{[1]}=\frac{1}{\Delta^2}\begin{pmatrix} |\Phi_1|^4+|\Phi_2|^4+2\left(\frac{\lambda^*}{\lambda}+\frac{\lambda}{\bar\lambda}-1\right)|\Phi_1|^2|\Phi_2|^2 & 2\left(|\Phi_1|^2+\frac{\lambda}{\bar\lambda}|\Phi_2|^2-\frac{\bar\lambda}{\lambda}|\Phi_1|^2-|\Phi_2|^2\right)\Phi_1\bar\Phi_2 \\ 2\left(|\Phi_1|^2-\frac{\lambda}{\bar\lambda}|\Phi_1|^2+\frac{\bar\lambda}{\lambda}|\Phi_2|^2-|\Phi_2|^2\right)\bar\Phi_1\Phi_2 & -\left(|\Phi_1|^4+|\Phi_2|^4+2\left(\frac{\bar\lambda}{\lambda}+\frac{\lambda}{\bar\lambda}-1\right)|\Phi_1|^2|\Phi_2|^2\right) \end{pmatrix}.$$

Содан кейін, спин векторының құрауыштары келесі түрде анықталады:

$$A_3^{[1]}=\frac{1}{\Delta^2}\left(|\Phi_1|^4+|\Phi_2|^4+2\left(\frac{\bar\lambda}{\lambda}+\frac{\lambda}{\bar\lambda}-1\right)|\Phi_1|^2|\Phi_2|^2\right), \tag{65}$$

$$A^{+[1]}=\frac{2}{\Delta^2}\left(|\Phi_1|^2+\frac{\lambda}{\bar\lambda}|\Phi_2|^2-\frac{\bar\lambda}{\lambda}|\Phi_1|^2-|\Phi_2|^2\right)\Phi_1\bar\Phi_2, \tag{66}$$

$$A^{-[1]}=\frac{2}{\Delta^2}\left(|\Phi_1|^2-\frac{\lambda}{\lambda^*}|\Phi_1|^2+\frac{\bar\lambda}{\lambda}|\Phi_2|^2-|\Phi_2|^2\right)\bar\Phi_1\Phi_2. \tag{67}$$

Сонымен қатар $\Phi_1=l_1e^{\mu+i\chi}$, $\Phi_2=l_2e^{-\mu-i\chi}$, мұндағы $\frac{|l_2|}{|l_1|}=e^{2\gamma}$, $\frac{|l_2|}{|l_1|}=e^{-2\gamma}$, $l_1=|l_1|e^{i\gamma_1}$, $l_2=|l_2|e^{i\gamma_2}$, γ_1,γ_2,γ – нақты тұрақтылар. Және

$$z=2\alpha\beta x+\left(2\alpha\beta-\frac{\alpha\beta}{2(\alpha^2+\beta^2)^2}\right)t-\tau_1,$$
$$\chi=-(\alpha^2-\beta^2)x-\left(\alpha^2-\beta^2-1+\frac{\alpha^2-\beta^2}{4(\alpha^2+\beta^2)^2}\right)t+\sigma_1,$$

ондағы $\lambda_1=\alpha+i\beta$. Мұндағы $\alpha,\beta,\tau_1,\sigma_1$ – нақты тұрақтылар.

Осыны (65)-(67) теңдеулерге қойғанда, ФЛ теңдеуінің спиндік жүйесінің бір солитонды шешімі алынады:

$$A_3^{[1]}=\frac{1}{\cosh^2 2(\gamma+z)}\left(\sinh^2 2(\gamma+z)+\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\right),$$
$$A^{+[1]}=\frac{2\beta}{\alpha^2+\beta^2}e^{i(\gamma_1-\gamma_2+2\chi)}\left(\frac{\beta\sinh 2(\gamma+z)}{\cosh^2 2(\gamma+z)}+\frac{i\alpha}{\cosh 2(\gamma+z)}\right),$$
$$A^{-[1]}=\frac{2\beta}{\alpha^2+\beta^2}e^{-i(\gamma_1-\gamma_2+2\chi)}\left(\frac{\beta\sinh 2(\gamma+z)}{\cosh^2 2(\gamma+z)}-\frac{i\alpha}{\cosh 2(\gamma+z)}\right),$$

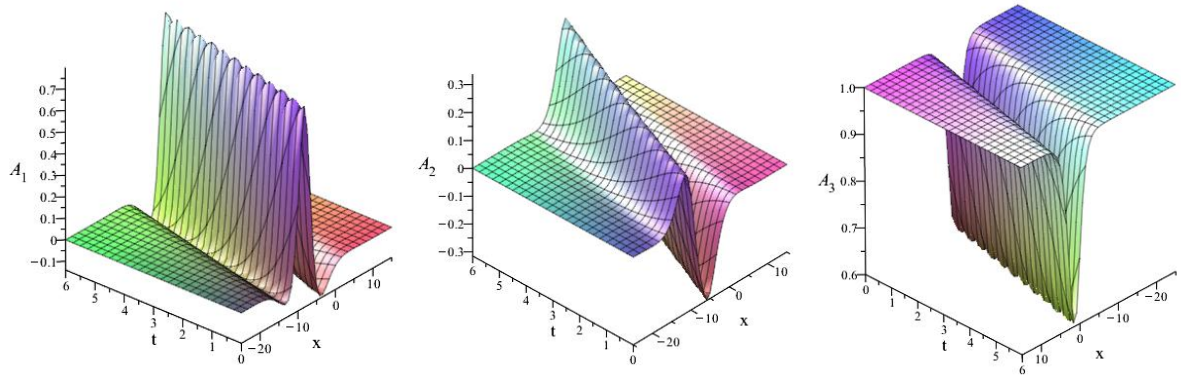
немесе

$$A_1^{[1]} = \frac{2\beta}{(\alpha^2+\beta^2)\cosh 2(\gamma+z)}\left(\frac{\beta\sinh 2(\gamma+z)}{\cosh 2(\gamma+z)}\cos(\gamma_1-\gamma_2+2\chi)-\alpha\sin(\gamma_1-\gamma_2+2\chi)\right),$$

$$A_2^{[1]} = -\frac{2\beta}{(\alpha^2+\beta^2)\cosh 2(\gamma+z)}\left(\frac{\beta\sinh 2(\gamma+z)}{\cosh 2(\gamma+z)}\sin(\gamma_1-\gamma_2+2\chi)-\alpha\cos(\gamma_1-\gamma_2+2\chi)\right),$$

$$A_3^{[1]} = \frac{1}{\cosh^2 2(\gamma+z)}\left(\sinh^2 2(\gamma+z)+\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\right).$$

11, 12-суреттерде **A** спин векторының құрауыштарының графиктері берілген. 11-суретте $A_1(x,t)$, $A_2(x,t)$ және $A_3(x,t)$ құрауыштардың 3D графиктері. 11-суретте $A_3(x,t)$ құрауыштың $t=0;3$ және 6 үшін эволюциясы көрсетілген. Параметрлері: $\alpha=1$, $\beta=1$, $\gamma_1=2.5$, $\gamma_2=2$, $\tau=1$, $\sigma=0.5$, $\gamma=3$.

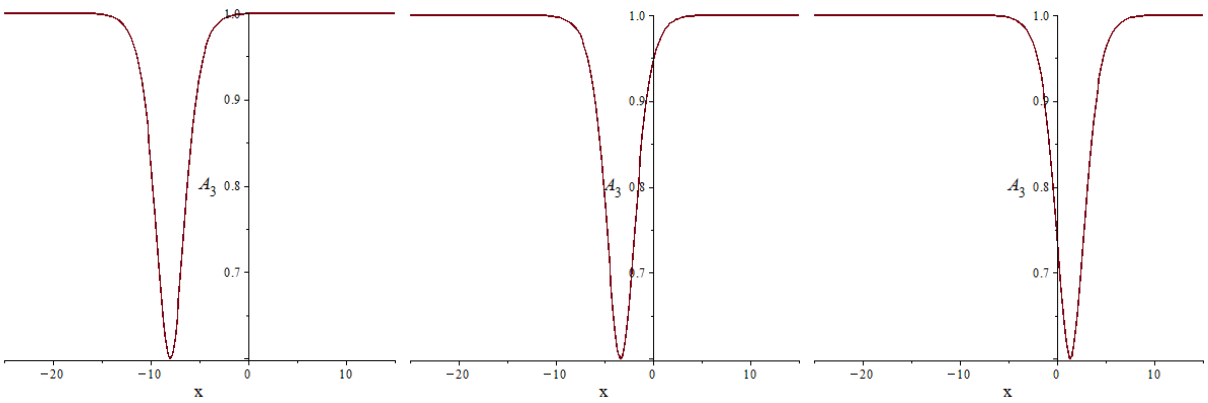


а ә б

а – $A_1(x,t)$; ә – $A_2(x,t)$; б – $A_3(x,t)$

Сурет 11 – Бір солитонды шешімінің құрауыштарының 3D графиктері

Ескерту – Параметрлер: $\alpha=1$, $\beta=1$, $\gamma_1=2.5$, $\gamma_2=2$, $\tau=1$, $\sigma=0.5$, $\gamma=3$, $x\in[-25,15]$ және $t\in[0,6]$



а ә б

а – $t = 0$; ә – $t = 3$; б – $t = 6$

Сурет 12 – $A_3(x,t)$ құраушының уақыт бойынша эволюциясы

Ескерту – Параметрлер 11-суреттегімен бірдей

Бұл графиктер ДТ арқылы алынған бір солитонды шешімнің локализацияланған және тұрақты құрылымын айқын көрсетеді. Толқын пішіні таралу кезінде өз формасын сақтайды, бұл оның серпімділігі мен солитон тұрақтылығын білдіреді. Сондықтан, вектор құрауыштарын визуализациялау ФЛ теңдеуінің спиндік жүйесі ферромагниттік ортадағы солитонды динамиканы сипаттайтын интегралданатын модель ретінде физикалық интерпретациясын айқындайды.

Бөлім бойынша қорытынды

Бұл бөлімде интегралданатын сызықты емес эволюциялық теңдеулердің маңызды моделдері – ФЛ теңдеуі, ТСЕШТ-І, жоғары ретті ЖСЕШТ және ФЛ теңдеуінің спиндік жүйесі зерттелінді. ДТ әдісі арқылы ФЛ теңдеуі мен ТСЕШТ-І үшін нақты бір солитонды шешімдер алынып, олардың тұрақты және локализацияланған толқындық құрылымдар екені көрсетілді. Сонымен қатар, жоғары ретті ЖСЕШТ үшін ДТ әдісі қолданып, бризерлер мен «қиратушы толқындар» динамикасы зерттеліп, спектрлік параметрлер мен уақытқа тәуелді коэффициенттер арқылы олардың траекториясы, амплитудасы және тұрақтылығы басқарылатыны дәлелденді. ФЛ теңдеуіне эквивалентті жаңа спиндік жүйе құрастырылып, оның қума толқын және солитон типті шешімдері алынды. Жалпы алғанда, алынған нәтижелер интегралданатын жүйелердің геометриялық және алгебралық табиғатын терең түсінуге, солитондық физиканың нақты модельдеріне қолдануға және (2+1)-өлшемді жалпылаулар, матрицалық жүйелер мен көп солитонды шешімдерге өтуге мүмкіндік беретін тиімді аналитикалық әдістерді ұсынады.

2 (2+1)-ӨЛШЕМДІ ЖӘНЕ ЕКІ КОМПОНЕНТТІ (2+1)-ӨЛШЕМДІ ФОКАС-ЛЕНЭЛЛС ТЕҢДЕУЛЕРІ ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ СПИНДІК ЖҮЙЕЛЕРІ

Соңғы жылдары зерттеушілердің назары күрделілігі жоғары, көп өлшемді және көп компонентті интегралданатын модельдерге ауысуда. Мұндай жүйелер нақты физикалық ортадағы сызықты емес динамиканы дәл сипаттай алады [80-83]. Осы бағытта аналитикалық шешімдерді алу және олардың толқындық қасиеттерін зерттеу бойынша елеулі нәтижелерге қол жеткізілді [84, 85]. Мысалы, екі компонентті ТСЕШТ [86] – екі поляризацияланған оптикалық импульстердің талшықты жарық өткізгіштегі таралуын модельдесе, екі компонентті Хирота-Максвелл-Блох жүйесі [87] электромагниттік толқындар мен резонанстық орта арасындағы когеренттік әсерлесуді сипаттайды. Бұдан бөлек, Саса-Сатсума типіндегі көп компонентті кеңейтілген жүйелер [88, 89] фемтосекундтық импульстердің эволюциясын бейнелеп, жоғары ретті

дисперсия мен сызықтық емес эффектілерді есепке алады. Ал жалпыланған Герджиков-Иванов теңдеуі үшін соңғы жылдары Риман-Гильберт әдісі негізінде N-солитонды құрылымдар талданды [39, p. 12021-12034].

Бұл модельдер сызықты емес оптикада, плазма физикасында және фотондық құрылымдарда көп режимді процестерді сипаттау үшін ерекше маңызды, себебі олар күрделі дисперсиялық әсерлерді, сызықты емес өзара әрекеттесулерді және модуляциялық тұрақсыздықты толық қамтиды. Осының нәтижесінде өте қысқа импульстердің таралуын дәл моделдеу, когеренттік толқындарды басқару және энергия тасымалының тиімді механизмдерін анықтау мүмкін болады. Мұндай шешімдер байланыс технологияларын дамытуда, плазмалық жүйелерді басқаруда және фотондық құрылғылардың жұмысын оңтайландыруда маңызды рөл атқарады.

Көп өлшемді және көп компонентті модельдер үшін алынатын солитонды шешімдер ерекше физикалық маңызға ие. Олар бұзылусыз таралатын, энергиясы локализацияланған толқын пакеттерін сипаттайды. Сызықты емес оптикада бұл шешімдер көпрежимді талшықтардағы ультрақысқа жарық импульстерінің тұрақтылығын түсіндіреді. Плазма физикасында олар ион-акустикалық солитондар сияқты тұрақты құрылымдарға сәйкес келеді, бұл сызықты емес әсер мен дисперсия арасындағы тепе-теңдіктің табиғатын ашуға мүмкіндік береді.

Айта кету керек, ФЛ теңдеуі айқын сызықты емес сипатқа ие, сондықтан оның ЛЖ классикалық Абловиц-Кауф-Ньюэлл-Сегур иерархиясынан ерекшеленеді. Бұл фактор, әсіресе жоғары өлшемдерде, аналитикалық шешімдер құруды қиындатады. Осыған байланысты бұл бөлімде (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеуі құрастырылады [90]. Соңғы жылдары жаңадан құрылған бұл модельге қызығушылық артып, оның толқындық динамикасы жан-жақты зерттелуде. Мысалы, [91] зерттеуінде жоғары ретті роуг-толқындардың қалыптасу механизмі талданса, [92] жұмысында солитондар, дегеративтік солитондар, лумптар және лумп тізбектері секілді күрделі толқындық құрылымдардың өзара әсері қарастырылған. Ал [93] еңбегінде Вронскиан және бисызықты әдістерді біріктіру арқылы (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеуінің параметрленген нұсқасы зерттелген.

Келесі бөлімшелерде (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеуі мен оның екі компонентті нұсқасы және олардың ЛЖ ұсынылады. Оларға арналған нақты аналитикалық шешімдер әр түрлі әдістер арқылы ұсынылады. Сонымен қатар, осы теңдеулерге сәйкес келетін спиндік жүйелер құрастырылып, интегралданатын жүйелердің геометриялық және алгебралық құрылымдарын терең түсінуге мүмкіндік береді.

2.1 (2+1)-өлшемді Фокас-Ленэллс теңдеуінің шешімдері

Бұл бөлімшеде (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеуі және оған сәйкес ЛЖ құрылады. Құрастырылған ЛЖ негізінде теңдеудің бисызықты түрлендірілуі жүргізіліп, оның Хиротаның классикалық бисызықты әдісі арқылы нақты бір және екі солитонды шешімдері алынады. Бұл шешімдер (2+1)-өлшемді жүйенің

сызықты емес толқындық динамикасын сипаттайтын негізгі локализацияланған құрылымдардың қасиеттерін ашуға мүмкіндік береді.

Сонымен қатар, зерттеу аясында (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеуінің 1-ретті, 2-ретті және жалпы N-ретті ДТ құрылады. Алынған ДТ арқылы теңдеудің нақты солитонды шешімдері жүйелі түрде алынады. Атап айтқанда, 1-ретті ДТ негізінде бір солитонды, ал 2-ретті ДТ көмегімен екі солитонды шешімдер алынуы көрсетіледі. Жалпы N-ретті ДТ формуласы көп солитонды шешімдерді құруға мүмкіндік беріп, толқындардың күрделі өзара әрекеттесулерін аналитикалық түрде сипаттауға жол ашады.

Осылайша, бұл бөлімшеде (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеуі үшін Хирота әдісі мен ДТ үйлесімі негізінде солитонды шешімдер алу тәсілдері жан-жақты зерттеліп, интегралданатын жүйелер теориясының көп өлшемді кеңістіктегі қолданылуы кеңейтіледі.

2.1.1 (2+1)-өлшемді Фокас-Ленэллс теңдеуі

Енді (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеуін құруға көшеміз. Ол үшін ізделінді теңдеудің ЛК-сін келесі түрде анықталады (оның нақты түрі төменде табылады) [94]:

$$\Psi_x = U(x,t,\lambda)\Psi, \tag{67}$$

$$\Psi_t = \alpha\Psi_y + W(x,t,\lambda)\Psi, \tag{68}$$

мұнда α тұрақты, U және W матрицалық операторлары

$$U = -i\lambda^2\sigma_3 + \lambda Q,$$
$$W = W_0 + \frac{1}{\lambda}W_{-1} + \frac{1}{\lambda^2}W_{-2},$$

бұл жердегі W_0, W_{-1} және W_{-2} анықтауымыз керек белгісіз 2×2 матрицалар

$$W_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad W_{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \qquad W_{-2} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},$$

мұнда a_{ij}, b_{ij} және c_{ij} тұрақтылар.

(67) және (68) теңдеулерін айқас дифференциалдау арқылы (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеуі үшін келесі үйлесімділік шарты алынады:

$$U_t - W_x + [U,W] - \alpha U_y = 0. \tag{69}$$

(69) теңдеуден шығады

$$\lambda Q_t - \alpha\lambda Q_y - W_{0x} - \frac{1}{\lambda}W_{-1x} - \frac{1}{\lambda^2}W_{-2x} - i\lambda^2[\sigma_3, W_0] - i\lambda[\sigma_3, W_{-1}] - i[\sigma_3, W_{-2}] +$$

$$+\lambda[Q, W_0] + [Q, W_{-1}] + \frac{1}{\lambda}[Q, W_{-2}] = 0. \qquad (69)$$

(69) теңдеуді λ дәрежелері бойынша жіктегенде табылады

$$a_{12} = 0, \quad a_{21} = 0, \quad b_{11x} = q_x c_{21} - c_{12} r_x, \quad b_{12} = -qc_{1122}, \quad b_{21} = rc_{1122}, \quad a_{11x} = q_x b_{21} - b_{12} r_x,$$

$$a_{22x} = -q_x b_{21} + b_{12} r_x, \quad c_{12} = \frac{iq_x b_{1122}}{2}, \quad c_{21} = \frac{ir_x b_{1122}}{2}, \quad c_{11x} = c_{12x} = c_{21x} = c_{22x} = 0$$

және

$$q_{xt} - \alpha q_{xy} - 2ib_{12} - q_x a_{1122} = 0, \qquad (70)$$

$$r_{xt} - \alpha r_{xy} + 2ib_{21} + r_x a_{1122} = 0. \qquad (71)$$

Интегралдау арқылы алатыны: $a_{11} = qrc_{1122} + a_{110}$, $a_{22} = -qrc_{1122} + a_{220}$. Бұл жердегі белгісіз тұрақтыларды $a_{110} = i$, $a_{220} = -i$, $c_{21} = c_{12} = 0$, $c_{11} = -i/4$, $c_{22} = i/4$ ретінде анықталады. Сол кезде W_{-1} матрица мен матрицаның құрамдас бөліктері W_0 келесі мәндерді қабылдайды:

$$b_{11} = b_{22} = 0, \quad b_{12} = \frac{iq}{2}, \quad b_{21} = -\frac{ir}{2}, \quad a_{12} = a_{21} = 0, \quad a_{11} = -\frac{iqr}{2} + i, \quad a_{22} = \frac{iqr}{2} - i.$$

Осылайша, анықталған белгісіздерді (70) және (71) теңдеулерге қойып, оны i – ге көбейтіп, $\alpha = 1$ жағдайында

$$iq_{xt} - iq_{xy} + 2q_x - q_x qr + iq = 0, \qquad (72)$$

$$ir_{xt} - ir_{xy} - 2r_x + r_x rq + ir = 0. \qquad (73)$$

Демек, табылған (2+1) өлшемді ФЛ теңдеуінің (72) және (73) ЛК келесідей болады [95]:

$$\Psi_x = U\Psi = (-i\lambda^2\sigma_3 + \lambda Q)\Psi, \qquad (74)$$

$$\Psi_t = \Psi_y + W\Psi = \Psi_y + (W_0 + \frac{1}{\lambda}W_{-1} - \frac{i}{4\lambda^2}o_3)\Psi. \qquad (75)$$

Мұнда

$$Q=\begin{pmatrix}0 & q_x\\ r_x & 0\end{pmatrix},\qquad W_0=i\sigma_3-\frac{iqr}{2}\sigma_3,\qquad W_{-1}=\frac{i}{2}\begin{pmatrix}0 & q\\ -r & 0\end{pmatrix},\qquad \sigma_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Осылайша, (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеуін және оның ЛК алынды.

2.1.2 Билинеаризация

Интегралданатын сызықты емес дифференциалдық теңдеулердің кейбір солитонды шешімдерін Хиротаның бисызықты әдісі арқылы табуға болады [96]. Ол үшін алдымен осы әдісті қолданып теңдеудің бисызықты түрін құрастыру керек және құрастырылған бисызықты түрді пайдаланып ізделінді теңдеудің шешімдерін табу керек. Болашақта бұл әдісті (79) және (80) теңдеулердің көп солитонды шешімдерін алу үшін қолдануға болады.

Сонымен, (2+1) өлшемді ФЛ теңдеуінің бисызықты түрін құрылады. Ол үшін (72) және (73) теңдеулер жүйесін $r=-\bar{q}$ түрінде қайта жазылады. Сонда

$$iq_{xt}-iq_{xy}+2q_x-q_x|q|^2+iq=0. \tag{76}$$

(76) теңдеудің бисызықты түрі келесі тұжырыммен белгіленеді:

$$q=\frac{g}{f}, \tag{77}$$

мұнда g және f - x, y және t-ның күрделі функциялары.

Енді аргументтерге қатысты (77) теңдеудің туындыларын табамыз x, xt, xy

$$q_x=\frac{g_x f-gf_x}{f^2}, \tag{78}$$

$$q_{xt}=\frac{g_{xt}f-g_x f_t-g_t f_x+gf_{xt}}{f^2}-\frac{2g}{f^3}(f_{xt}f-f_x f_t), \tag{79}$$

$$q_{xy}=\frac{g_{xy}f-g_x f_y-g_y f_x+gf_{xy}}{f^2}-\frac{2g}{f^3}(f_{xy}f-f_x f_y). \tag{80}$$

(78)-(80) теңдеулерін (76) теңдеуге қойып, Хирота операторлары арқылы жазып, келесі қасиеттері қолданылады:

$$D_x^m D_t^n f\cdot\bar{f}=\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x'}\right)^m\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t'}\right)^n f(x,t)\bar{f}(x',t')|_{x'=x,t'=t},$$

мұнда x', t' екі формальды айнымалы $f(x,t)$ және $f^*(x',t')$ екі функция m және n екі теріс емес бүтін сан, ақырында шығатыны

$$\frac{1}{f^2}\left(iD_xD_t(g\cdot f)-iD_xD_y(g\cdot f)+2D_x(g\cdot f)+igf\right)-$$
$$-\frac{2g}{f^2\bar{f}}\left(iD_xD_t(f\cdot\bar{f})-iD_xD_y(f\cdot\bar{f})-\frac{1}{2}D_x(g\cdot\bar{g})\right)+$$
$$+\frac{2gf_x}{f^3\bar{f}}\left(iD_t(f\cdot\bar{f})-iD_y(f\cdot\bar{f})-\frac{1}{2}g\cdot\bar{g}\right)-$$
$$-\frac{2g}{f^2\bar{f}}\left(iD_t(f\cdot\bar{f}_x)-iD_y(f\cdot\bar{f}_x)-\frac{1}{2}g\cdot\bar{g}_x\right)=0. \quad (81)$$

Осылайша, (81) теңдеуді f дәрежелеріне бөле отырып, (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеуінің бисызықты түрі алынады

$$iD_xD_t(g\cdot f)-iD_xD_y(g\cdot f)+2D_x(g\cdot f)+igf=0, \quad (82)$$

$$iD_xD_t(f\cdot\bar{f})-iD_xD_y(f\cdot\bar{f})-\frac{1}{2}D_x(g\cdot\bar{g})=0, \quad (83)$$

$$iD_t(f\cdot\bar{f})-iD_y(f\cdot\bar{f})-\frac{1}{2}g\cdot\bar{g}=0, \quad (84)$$

$$iD_t(f\cdot\bar{f}_x)-iD_y(f\cdot\bar{f}_x)-\frac{1}{2}g\cdot\bar{g}_x=0, \quad (85)$$

мұнда D_x, D_y және D_t бисызықты дифференциалдық операторлар.

Сонымен, (72) және (73) теңдеудің бисызықты түрі алынды (82)-(85) теңдеулер. Бұл бисызықты форманы пайдалана отырып, (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеуінің көп солитонды шешімдерін келесі бөлімдерде табылады және олардың графиктері салынады.

2.1.3 Хирота әдісімен солитонды шешімдер

Бұл бөлімше алдыңғы бөлімшені жалғастырады, онда (2+1)-өлшемді интегралданатын ФЛ теңдеуі құрылады, оның Хирота әдісі бойынша бисызықты түрі алынады. Осы бөлімде Хирота әдісі арқылы нақты бір және екі солитонды шешімдері табылады:

$$g(x,y,t)=\varepsilon g_1(x,y,t)+\varepsilon^3 g_3(x,y,t)+\ldots, \quad (86)$$

$$f(x,y,t)=1+\varepsilon^2 f_2(x,y,t)+\varepsilon^4 f_4(x,y,t)+\ldots, \quad (87)$$

мұнда ε - кез-келген мәнді қабылдай алатын формалды параметр, g_j және f_n($j = 1,3,5,...;\ n = 2,4,6,...$).

1-солитонды шешім. (72) және (73) теңдеулердің бір солитонды шешімін табу жағдайында (86) және (87) теңдеулердегі формалды параметр $\varepsilon = 1$ үшін $j = 1,\ n = 2$ ғана алынады, яғни:

$$g = \varepsilon g_1, \tag{88}$$

$$f = 1 + \varepsilon^2 f_2 \tag{89}$$

және шешімді келесі тұжырым бойынша ізделінеді:

$$q = \frac{g}{f} = \frac{g_1}{1 + f_2}, \tag{90}$$

мұнда $g_1 = e^{\theta_1}$, $\theta_1 = a_1 x + b_1 t + c_1 y + d_1$, $\bar{\theta}_1 = \bar{a}_1 x + \bar{b}_1 t + \bar{c}_1 y + \bar{d}_1$, ондағы a_1, b_1, c_1, d_1- комплексті тұрақтылар.

(88) және (89) теңдеулерді (76) теңдеуге қойып, ε дәрежелері бойынша топтастырып, Хирота операторының қасиеттерін қолдана отырып, келесі теңдеулер алынады:

$$\varepsilon^1 \ : \ ig_{1tx} - ig_{1yx} + 2g_{1x} + ig_1 = 0, \tag{91}$$

$$\varepsilon^3 \ : \ ig_{1tx} f_2 - ig_{1t} f_{2x} - ig_{1x} f_{2t} + ig_1 f_{2tx} - ig_{1yx} f_2 + + ig_{1y} f_{2x} + \\ + ig_{1x} f_{2y} - ig_1 f_{2yx} + 2g_{1x} f_2 - 2g_1 f_{2x} + ig_1 f_2 = 0, \tag{92}$$

$$\varepsilon^2 \ : \ if_{2tx} + i\bar{f}_{2tx} - if_{2yx} - i\bar{f}_{2yx} - \frac{1}{2} g_{1x}\bar{g}_1 + \frac{1}{2} g_1 \bar{g}_{1x} = 0, \tag{93}$$

$$\varepsilon^4 \ : \ if_{2tx}\bar{f}_2 - if_{2t}\bar{f}_{2x} - if_{2x}\bar{f}_{2t} + if_2\bar{f}_{2tx} - if_{2yx}\bar{f}_2 + + if_{2y}\bar{f}_{2x} + if_{2x}\bar{f}_{2y} - if_2\bar{f}_{2yx} = 0, \tag{94}$$

$$\varepsilon^2 \ : \ if_{2t} - i\bar{f}_{2t} - if_{2y} + i\bar{f}_{2y} - \frac{1}{2} g_1\bar{g}_1 = 0, \tag{95}$$

$$\varepsilon^4 \ : \ if_{2t}\bar{f}_2 - if_2\bar{f}_{2t} - if_{2y}\bar{f}_2 + if_2\bar{f}_{2y} = 0, \tag{96}$$

$$\varepsilon^2 \ : \ -i\bar{f}_{2xt} + i\bar{f}_{2xy} - \frac{1}{2} g_1\bar{g}_{1x} = 0, \tag{97}$$

$$\varepsilon^4 \ : \ if_{2t}\bar{f}_{2x} - if_2\bar{f}_{2xt} - if_{2y}\bar{f}_{2x} + if_2\bar{f}_{2xy} = 0. \tag{98}$$

(91) және (92) теңдеуден аламыз

$$a_1 = \frac{1}{c_1 - b_1 + 2i}, \quad \bar{a}_1 = \frac{1}{\bar{c}_1 - \bar{b}_1 - 2i}$$

және бастап (91)-(98) теңдеулер орындалады

$$f_2 = \frac{ia_1^2\bar{a}_1}{2(a_1 + \bar{a}_1)^2} e^{\theta_1 + \bar{\theta}_1}. \tag{99}$$

Енді (99) теңдеуді (90) теңдеуге қойып, (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеуі үшін қажетті 1-солитонды шешімді аламыз, ол келесі түрде жазылады:

$$q = \frac{e^{\theta_1}}{1 + \frac{ia_1^2\bar{a}_1}{2(a_1 + \bar{a}_1)^2} e^{\theta_1 + \bar{\theta}_1}} = \frac{2(a_1 + \bar{a}_1)^2}{2(a_1 + \bar{a}_1)^2 e^{-\theta_1} + ia_1^2\bar{a}_1 e^{\bar{\theta}_1}} \tag{100}$$

немесе (100) теңдеуді $\theta_1 = \kappa_1 + i\chi_1$ кезінде қайта жазуға болады, сол кезде:

$$q = \frac{4\alpha_1^2 e^{i\chi_1}}{4\alpha_1^2 e^{-\kappa_1} + \frac{1}{2}(\alpha_1^2 + \beta_1^2)(i\alpha_1 - \beta_1)e^{\kappa_1}}. \tag{101}$$

мұнда $\chi_1 = \beta_1 x + \nu_1 t + \tau_1 y + n_1, \quad \kappa_1 = \alpha_1 x + \mu_1 t + \sigma_1 y + m_1$ және a_1, b_1, c_1, d_1 комплексті тұрақтылар $a_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \ b_1 = \mu_1 + i\nu_1, \ c_1 = \sigma_1 + i\tau_1, \ d_1 = m_1 + in_1.$

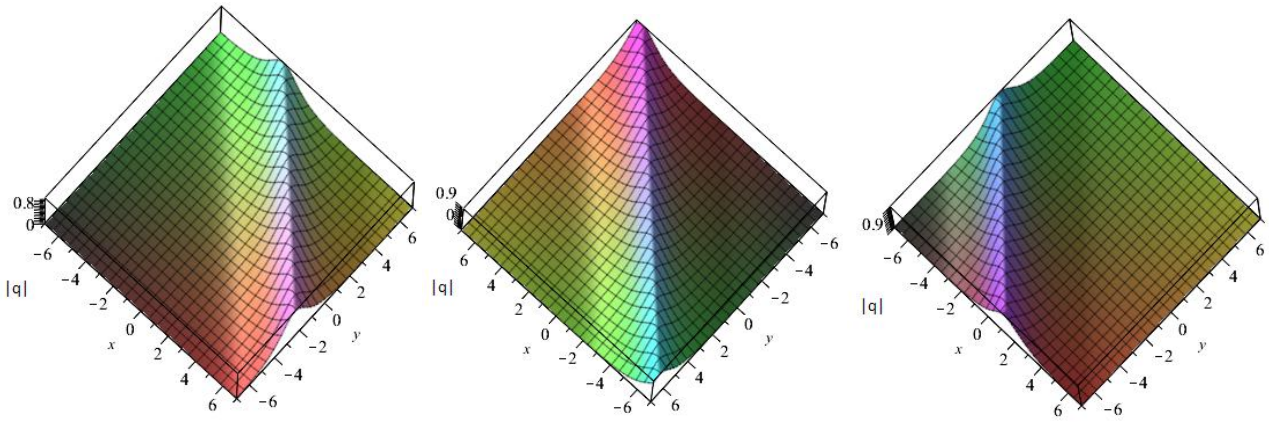
Осылайша, (101) теңдеу келесі түрде жазылады:

$$q = \frac{p^2 e^{i\chi_1}}{p\sqrt{h}\left(\frac{\sqrt{h}}{p} e^{\kappa_1} + \frac{p}{\sqrt{h}} e^{-\kappa_1}\right)}. \tag{102}$$

Бұл жерде $p = 2\alpha_1$ және $h = \frac{i}{2}(\alpha_1^2 + \beta_1^2)\alpha_1 - \frac{1}{2}(\alpha_1^2 + \beta_1^2)\beta_1$. Сонымен қатар, $\frac{\sqrt{h}}{p} = e_1^{\delta}, \quad \frac{p}{\sqrt{h}} = e^{-\delta_1}$ болғанда, (102) теңдеу

$$q = \frac{pe^{i\chi_1}}{2\sqrt{h}} sech(\kappa_1 + \delta_1) = \frac{pe^{i\chi_1}}{2\sqrt{h}\cosh(\kappa_1 + \delta_1)}. \tag{103}$$

Сонымен, (103) теңдеуі ізделінді (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеуі үшін нақты 1-солитонды шешімі болып табылады (13-сурет).



а ә б

а – $t=-5$; ә – t = 0; б – t = 5

Сурет 13 – Бір солитонды шешім

Ескерту – Параметрлері: $a_1=1-i$, $c_1=1-i$, $b_1=1-i$ және $d_1=1-i$

2-солитонды шешім. (76) теңдеудің 2-солитонды шешімін тапқан кезде (88) және (89) теңдеулердегі формальды параметр $\varepsilon=1$ ретінде қабылданады және $j=1,3,\ n=2,4$, сонда

$$g=\varepsilon g_1+\varepsilon^3 g_3, \tag{104}$$

$$f=1+\varepsilon^2 f_2+\varepsilon^4 f_4. \tag{105}$$

(104) және (105) теңдеулерді (88) және (89) теңдеулерге апарып, ε дәрежелері бойынша жинақтап, (90) теңдеудің келесі түрдегі 2 солитонды шешімі алынады

$$q=\frac{g_1+g_3}{1+f_2+f_4},$$

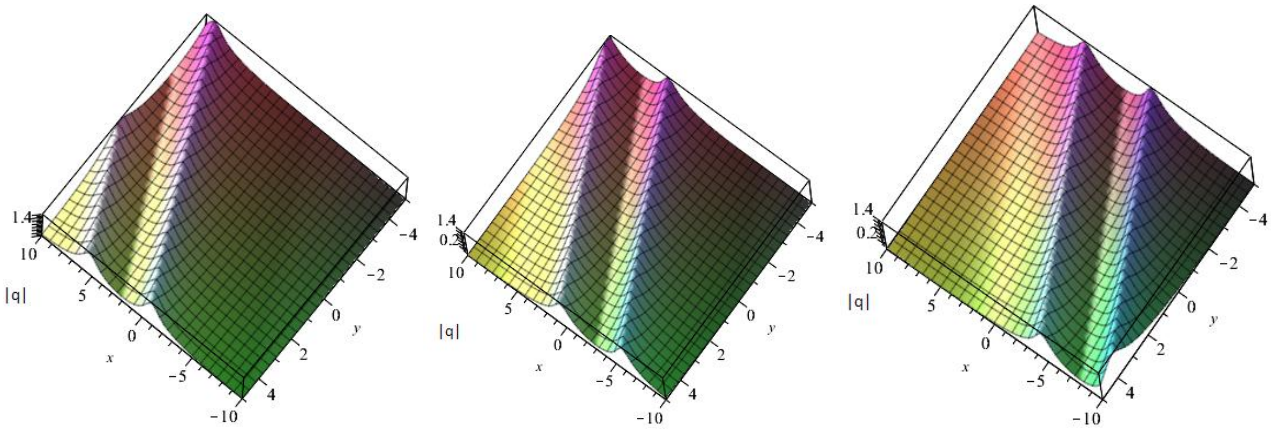
бұл жердегі $g_1=e^{\theta_1}+e^{\theta_2}$, $g_3=k_1e^{\theta_1+\theta_2+\bar{\theta}_1}+k_2e^{\theta_1+\theta_2+\bar{\theta}_2}$, $f_2=l_1e^{\theta_1+\bar{\theta}_1}+l_2e^{\theta_1+\bar{\theta}_2}+$ $+l_3e^{\bar{\theta}_1+\theta_2}+l_4e^{\theta_2+\bar{\theta}_2}$, $f_4=me^{\theta_1+\bar{\theta}_1+\theta_2+\bar{\theta}_2}$, мұндағы

$$\theta_1=a_1x+b_1t+c_1y+d_1,\quad \bar{\theta}_1=\bar{a}_1x+\bar{b}_1t+\bar{c}_1y+\bar{d}_1,$$
$$\theta_2=a_2x+b_2t+c_2y+d_2,\quad \bar{\theta}_2=\bar{a}_2x+\bar{b}_2t+\bar{c}_2y+\bar{d}_2,$$
$$l_1=\frac{ia_1^2\bar{a}_1}{2(a_1+\bar{a}_1)^2},\quad l_2=\frac{ia_1^2\bar{a}_2}{2(a_1+\bar{a}_2)^2},\quad l_3=\frac{ia_2^2\bar{a}_1}{2(\bar{a}_1+a_2)^2},\quad l_4=\frac{ia_2^2\bar{a}_2}{2(a_2+\bar{a}_2)^2},$$

$$k_1 = \frac{i(\bar{a}_1)^3(a_2 - a_1)^2}{2(\bar{a}_1 + a_2)^2(a_1 + \bar{a}_1)^2}, \quad k_2 = \frac{i(\bar{a}_2)^3(a_2 - a_1)^2}{2(a_1 + \bar{a}_2)^2(a_2 + \bar{a}_2)^2},$$

$$m = -\frac{(a_2 - a_1)^2(\bar{a}_2 - \bar{a}_1)^2(a_1 + a_2 + \bar{a}_1 + \bar{a}_2)\bar{a}_1\bar{a}_2 a_1^2 a_2^2}{2(a_1 + \bar{a}_1)^2(a_2 + \bar{a}_2)^2(a_1 + \bar{a}_2)^2(a_2 + \bar{a}_1)^2},$$

мұнда a_n, b_n, c_n, d_n күрделі тұрақтылар және $n = 1, 2$.



а ә б

а – $t = -5$; ә – t = 0; б – t = 5

Сурет 14 – Екі солитонды шешім

Ескерту – Параметрлері: $a_1 = 0,5 + 0,5i$, $c_1 = 0,5 + 0,5i$, $b_1 = 0,5 + 0,5i$ және $d_1 = 0,5 + 0,5i$

Осылайша, 13, 14-суреттерде (76) теңдеудің Хирота әдісі бойынша нақты солитонды шешімдері берілген.

2.1.4 Дарбу түрлендіруі әдісімен солитонды шешімдер

Бұл бөлімде ДТ арқылы (76) теңдеудің шешімі табылады. Ол үшін алдымен оның ДТ құрылады.

1-реттi ДТ. (72) және (73) теңдеулері үшін 1-ретті ДТ табылады. Дарбу операторы $L^{[1]}$ үшін $\psi^{[1]} = L^{[1]}\psi = (\lambda N + M + \lambda^{-1}K)\psi$, мұндағы N, M және K келесі түрдегі матрицалар:

$$N = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} a_{-1} & b_{-1} \\ c_{-1} & d_{-1} \end{pmatrix}.$$

Мұнда a_0, b_0, c_0, d_0, a_1, b_1, c_1, d_1, a_{-1}, b_{-1}, c_{-1} және d_{-1} функциялары x және t тәуелді.

$L^{[1]}$ кезінде (72) және (73) теңдеулерінің құрылымын сақтауды қамтамасыз ету үшін келесі үйлесімділік шарттары орындалуы тиіс:

$$L_x^{[1]} + L^{[1]}U = U^{[1]}L^{[1]}, \qquad L_t^{[1]} + L^{[1]}W = L_y^{[1]} + W^{[1]}L^{[1]}. \tag{106}$$

(106) теңдеуден шығатыны

$$\lambda N_x + M_x + \lambda^{-1}K_x + \left(\lambda N + M + \lambda^{-1}K\right)\left(J\lambda^2 + Q\lambda\right) = \\ = \left(J\lambda^2 + Q^{[1]}\lambda\right)\left(\lambda N + M + \lambda^{-1}K\right), \tag{107}$$

$$\lambda N_{1t} + M_{1t} + \lambda^{-1}K_{1t} + \left(\lambda N_1 + M_1 + \lambda^{-1}K_1\right)\left(W_0 + \frac{1}{\lambda}W_{-1} - \frac{i}{4\lambda^2}\sigma_3\right) = \\ = \lambda N_{1y} + M_{1y} + \lambda^{-1}K_{1y} + \left(W_0^{[1]} + \frac{1}{\lambda}W_{-1}^{[1]} - \frac{i}{4\lambda^2}\sigma_3\right)\left(\lambda N_1 + M_1 + \lambda^{-1}K_1\right). \tag{108}$$

(107) және (108) теңдеулердің коэффициенттерін λ дәрежелері бойынша қарастырып, матрицаларды құрауыштары арқылы жазғанда алынады $b_1 = 0, \quad c_1 = 0, \quad b_{-1} = 0, \quad c_{-1} = 0$ және

$$b_0 + qa_{-1} - q^{[1]}d_{-1} = 0, \\ c_0 + rd_{-1} - r^{[1]}a_{-1} = 0.$$

Енді $a_{-1} = d_{-1} = a_1 = d_1 = 1$ деп ұйғарайық, сол кезде Дарбу операторын келесі түрде жазуға болады: $L^{[1]} = \lambda I + M + \lambda^{-1}I$, мұндағы I бірлік матрица.

Осылайша, (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеуі үшін 1-ретті ДТ келесідей болады:

$$q^{[1]} = q + b_0, \tag{109}$$

$$r^{[1]} = r + c_0. \tag{110}$$

Келесі бөлімшеде ДТ қолдану үшін 1-ретті түрлендіруді меншікті функциялар арқылы өрнектелінеді.

Меншікті функциялар арқылы 1-ретті ДТ. $(\psi_1, \psi_2)^T$ бағандық вектор λ спектрлік параметр үшін ЛЖ-ның (72) және (73) теңдеулерінің шешімі болсын. Сонда қосалқы $(-\overline{\psi}_2, \overline{\psi}_1)^T$ вектор сол ЛЖ-ның шешімі болып табылады, бірақ $\overline{\lambda}$ түйіндес спектралдік параметрге сәйкес. Бұл қасиет ДТ-нің M матрицасын келесі түрде меншікті функциялар арқылы құруға мүмкіндік береді:

$$M = H\Lambda^{-1}H^{-1}, \tag{111}$$

мұнда H меншікті функциялардан тұратын негізгі матрица

$$H=\begin{pmatrix}\psi_1(\lambda_1,t,x,y) & -\bar{\psi}_2(\lambda_1,t,x,y)\\ \psi_2(\lambda_1,t,x,y) & \bar{\psi}_1(\lambda_1,t,x,y)\end{pmatrix},\quad H^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}\bar{\psi}_1 & \bar{\psi}_2\\ -\psi_2 & \psi_1\end{pmatrix}. \tag{112}$$

бұл жердегі $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2)$, $\lambda_2=\bar{\lambda}_1=\bar{\lambda}$ және $\Delta=|\psi_1|^2+|\psi_2|^2$.

(112) теңдеуді (111)-ге қоя отырып, M матрицасының нақты өрнегін алынады

$$M=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}\lambda^{-1}|\psi_1|^2+(\bar{\lambda})^{-1}|\psi_2|^2 & (\lambda^{-1}-(\bar{\lambda})^{-1})\psi_1\bar{\psi}_2\\ (\lambda^{-1}-(\bar{\lambda})^{-1})\bar{\psi}_1\psi_2 & \lambda^{-1}|\psi_2|^2+(\bar{\lambda})^{-1}|\psi_1|^2\end{pmatrix}. \tag{113}$$

(113) теңдеуден Дарбу матрицасының b_0 және c_0 элементтерінің өрнектері келесідей алынады:

$$b_0=\frac{(\lambda^{-1}-(\bar{\lambda})^{-1})\psi_1\bar{\psi}_2}{\Delta},\quad c_0=\frac{(\lambda^{-1}-(\bar{\lambda})^{-1})\bar{\psi}_1\psi_2}{\Delta}.$$

Осылайша, 1-ретті ДТ нәтижесінде алынған (109) және (110) теңдеулердегі $q^{[1]}$ және $r^{[1]}$ өрістерді меншікті функция құрауыштары арқылы өрнектелінеді

$$q^{[1]}=q+\frac{(\lambda^{-1}-\bar{\lambda}^{-1})\psi_1\bar{\psi}_2}{\Delta}, \tag{114}$$

$$r^{[1]}=r+\frac{(\lambda^{-1}-\bar{\lambda}^{-1})\bar{\psi}_1\psi_2}{\Delta}. \tag{115}$$

Бұл өрнектер (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеуі үшін нақты солитонды шешімдерді құрудың негізгі негізі болып табылады, олар келесі бөлімдерде көрсетіледі.

2-реттi ДТ. 1-ретті ДТ негізінде енді 2-ретті ДТ аламыз, сол арқылы күрделірек шешімдер, атап айтқанда екі солитонды шешімдер алынады. Бұл қайталап қолдану құрылымы ДТ-нің алгебралық құрылымына сүйенеді, мұнда әрбір келесі қадам алдыңғы қадамның нәтижесіне негізделіп құрылады.

Енді Φ бастапқы өріске $\Phi^{[2]}$ 2-ретті ДТ қолданылады

$$\Phi^{[2]}=L^{[2]}\Phi^{[1]},$$

мұнда $L^{[2]}$ 2-ретті Дарбу матрицасын $L^{[2]}=\lambda I+M^{[2]}+\lambda^{-1}I$ деп алайық. Бұл жердегі $M^{[2]}$ екінші ретте енгізілген меншікті функцияларға тәуелді матрица

$$\Phi^{[2]}=L^{[2]}L^{[1]}\Phi=\left[(\lambda I+M^{[2]}+\lambda^{-1}I)(\lambda I+M^{[1]}+\lambda^{-1}I)\right]\Phi.$$

Бұл көбейтінді λ бойынша екінші дәрежелі көпмүше беретініне байланысты, ыңғайлылық үшін $l_2^0 = I, \quad l_2^1 = M^{[1]} + M^{[2]}, \quad l_2^2 = M^{[2]}M^{[1]}$ белгілеулерін жасайық. Сонда $L^{[2]}$-ны ықшам көпмүшелі формада қайта жазуға мүмкіндік береді: $L^{[2]} = (\lambda^2 + \lambda^{-2} + 2)l_2^0 + (\lambda + \lambda^{-1})l_2^1 + l_2^2$.

$L^{[2]}$-ны Лакс үйлесімділік шарттарына орнықтыру арқылы

$$L_x^{[2]} + L^{[2]}U = U^{[2]}L^{[2]}, \quad L_t^{[2]} + L^{[2]}W = L_y^{[2]} + W^{[2]}L^{[2]},$$

және λ дәрежелеріне сәйкес мүшелерді салыстыра отырып, түрленген потенциалдар $q^{[2]}$ және $r^{[2]}$ үшін эволюциялық теңдеулерді алуға болады.

Осы процедураның нәтижесі өрістер үшін нақты өрнектерді береді:

$$q^{[2]} = q + b_0 + b_0^{[1]}, \quad r^{[2]} = r + c_0 + c_0^{[1]}.$$

N-реттi ДТ. N - ретті ДТ 1-ретті ДТ-ді бірінен соң бірін қолдану арқылы алынады $L^{[n]}(\lambda) = \prod_{k=1}^{n}(\lambda I + M^{[k]} + \lambda^{-1}I), \qquad \psi^{[n]} = L^{[n]}(\lambda)\psi,$ мұндағы әрбір $M^{[k]}$ k -қадамда енгізілген меншікті функциялардан құрылады $L^{[n]}(\lambda) = \sum_{j=-n}^{n}\lambda^j L_j^{[n]}$.

Жаңа потенциалдар қайталап қолдану арқылы келесі түрде алынады:

$$q^{[n]} = q + \sum_{k=0}^{n-1} b_0^{[k]}, \qquad r^{[n]} = r + \sum_{k=0}^{n-1} c_0^{[k]}.$$

Бұл 1-ретті және 2-ретті нәтижелерді жалпылайды және көп солитонды шешімдерді құруға мүмкіндік береді.

Осылайша, *N*-ретті ДТ көп солитонды шешімдерді алуға мүмкіндік береді.

1-солитонды шешім. Бұл бөлімде (72) және (73) теңдеулердің нақты бір солитонды шешімін 1-ретті ДТ көмегімен шығарамыз. Нөлдік шекаралық шарттары бар $q = 0$ бастапқы шешімін алайық $q(x,y,t) \to 0,\ q_x(x,y,t) \to 0,$ $r(x,y,t) \to 0,\ |x|,|y| \to \infty$ [97, 98]. Алынған жүйе келесі түрге ие болады:

$$\psi_{1x} = -i\lambda^2\psi_1, \qquad \psi_{2x} = i\lambda^2\psi_2, \tag{116}$$

$$\psi_{1t} = \psi_{1y} + i\left(1 - \frac{1}{4\lambda^2}\right)\psi_1, \qquad \psi_{2t} = \psi_{2y} - i\left(1 - \frac{1}{4\lambda^2}\right)\psi_2. \tag{117}$$

Бұл теңдеулер келесі түрдегі экспоненциалдық шешімдерді қабылдайды:

$$\psi_1 = k_1 e^{-i\lambda^2 x + i\mu_1 y + i\left(\mu_1 + 1 - \frac{1}{4\lambda^2}\right)t + i\eta_1} = k_1 e^{\theta_1},$$

$$\psi_2 = k_2 e^{i\lambda^2 x + i\mu_2 y + i\left(\mu_2 - 1 + \frac{1}{4\lambda^2}\right)t + i\eta_2} = k_2 e^{\theta_2},$$

мұнда $\mu_1, \mu_2, k_1, k_2, \eta_1, \eta_2$ комплексті параметрлер. Оларды келесідей алынады:

$\mu_n = \omega_n + i\nu_n$, $\eta_n = \kappa_n + i\chi_n$, $n = 1,2$ және $k_1 = |k_1| e^{i\vartheta_1}$, $k_2 = |k_2| e^{i\vartheta_2}$, $\frac{|k_1|}{|k_2|} = e^{2\vartheta}$.

Бұл жердегі $\alpha, \beta, \omega_n, \nu_n, \kappa_n, \chi_n$ тиісті комплексті параметрлердің нақты және жорамал бөліктерін білдіреді.

(114) және (115) теңдеулердің бір солитонды шешімі келесідей жазылады

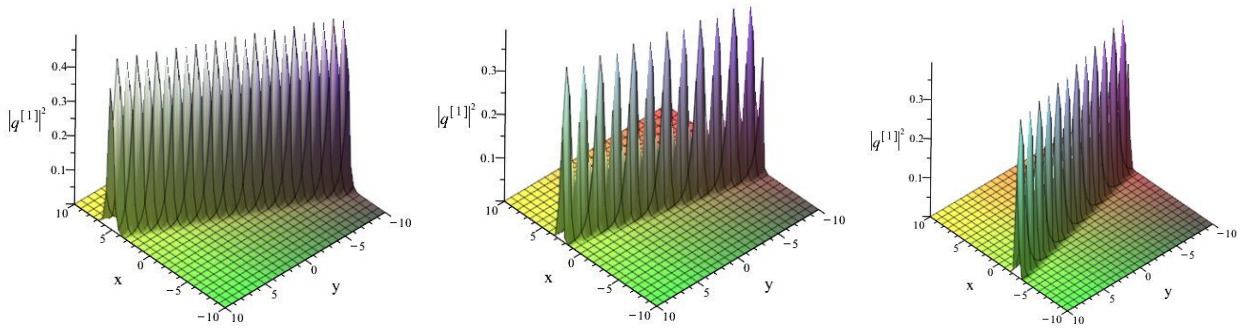
$$q^{[1]} = \frac{\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\bar{\lambda}}\right) e^{i(\vartheta_1 - \vartheta_2 + \theta_1 - \bar{\theta}_1)}}{2\cosh(2\vartheta + \theta_1 + \bar{\theta}_1)}. \qquad (118)$$

Демек, $\theta_1 = -i\lambda^2 x + i\mu_1 y + i\left(\mu_1 + 1 - \frac{1}{4\lambda^2}\right)t + i\eta_1$. $\mu_2 = \mu_1$ және $\eta_2 = -\eta_1$ десек, $\theta_2 = -\theta_1$ шығады.

14-суретте (118) теңдеуімен сипатталатын бір солитонды шешімнің $t = 0.5$ үшін таралуы көрсетілген, параметрлері $M_1 = 1 + i$ және $\delta_1 = 1$: (а) $\lambda = 1 + i$, (ә) $\lambda = 1 + 2i$, (б) $\lambda = 1 - 2i$. 14а, 14ә, 14 б-суреттері λ спектрлік параметрдің әр түрлі мәндерінде $t = 0.5$ уақыт мезетіндегі солитонның 3D профильдерін көрсетеді. Әрбір жағдайда (x, y) жазықтығында диагональ бойымен бағытталған, айқын локализацияланған солитондық толқын байқалады.

14а-сурет $\lambda = 1 + i$ мәніне сәйкес келеді. Бұл жағдайда амплитудасы салыстырмалы түрде жоғары, кеңістіктік формасы бірқалыпты, жақсы локализацияланған солитон байқалады. Толқын (x, y) жазықтығының диагональ бағыты бойымен шоғырланған, бұл айқын тербелістерсіз орнықты таралуын көрсетеді.

$\lambda = 1 + 2i$ үшін, 14ә-суретте көрсетілгендей, солитонды профиль сәл ұзартылып, амплитудасы төмендейді. Әлсіз кеңістіктік тербелістер пайда болады, бұл дисперсиялық эффектілердің күшеюін және спектрлік параметрдің жорамал бөлігінің өсуін көрсетеді. Алынған толқын формасы дисперсия мен локализация арасындағы өзара әрекеттен туындайтын модуляцияланған құрылымды көрсетеді.



а ә б

а – $\lambda = 1 + i$ үшін; ә – $\lambda = 1 + 2i$ үшін; б – $\lambda = 1 - 2i$ үшін

Сурет 15 – Спектрлік параметрдің әр түрлі мәндеріндегі $q^{[1]^2}$ -дің 3D-графиктері

15б-суретте, $\lambda = 1 - 2i$ мәніне сәйкес, солитон өзінің локализацияланған сипатын сақтайды, бірақ 15ә-суретпен салыстырғанда кеңістіктік профилі айна тәрізді көрінеді. Таралу бағыты кері бағытта, бұл λ-ның жорамал бөлігінің таңбасы солитон толқынының бағыты мен фазалық әрекетін анықтайтынын көрсетеді.

Жалпы алғанда, λ спектрлік параметрдің өзгеруі негізінен солитонның амплитудасына, таралу бағытына және модуляциясына әсер етеді, ал оның локализацияланған және тұрақты құрылымы сақталады.

$\theta_1 = \rho + i\varepsilon$ және $\lambda = \alpha + i\beta$ деп белгілей отырып, нақты және жорамал бөліктер келесі түрде беріледі:

$$\rho = 2\alpha\beta x - \nu_1 y - \left(\nu_1 + \frac{\alpha\beta}{2(\alpha^2+\beta^2)^2}\right)t - \chi_1,$$

$$\varepsilon = -(\alpha^2 - \beta^2)x + \omega_1 y + \left(\omega_1 + 1 - \frac{\alpha^2-\beta^2}{4(\alpha^2+\beta^2)^2}\right)t + \kappa_1.$$

Сәйкес меншікті функциялар келесі түрде болады:

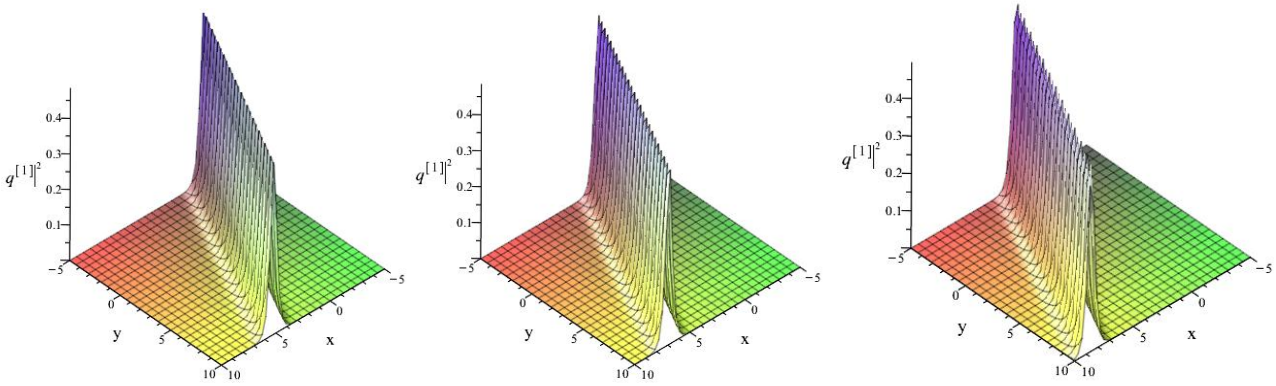
$$\psi_1 = k_1 e^{\rho + i\varepsilon}, \tag{119}$$

$$\psi_2 = k_2 e^{-\rho - i\varepsilon}. \tag{120}$$

(119) және (120) теңдеулерді (118) теңдеуге қоя отырып, нақты 1-солитонды шешім алынады

$$q^{[1]} = -\frac{i\beta e^{i(2\varepsilon + \vartheta_1 - \vartheta_2)}}{(\alpha^2+\beta^2)\cosh 2(\vartheta + \rho)}. \tag{121}$$

$(2+1)$-өлшемді ФЛ теңдеуінің бір солитонды шешімінің кеңістік-уақыттық динамикасын көрсету үшін, 15, 16-суреттерде $|q^{[1]}|^2$ өріс құрауыштарының графиктері берілген. Симуляциялар спектрлік параметр $\lambda = 1+i$ және келесі параметр мәндері үшін орындалды: $\omega_1 = 2$, $\nu_1 = 1$, $\chi_1 = 1$, $\kappa_1 = 1$.



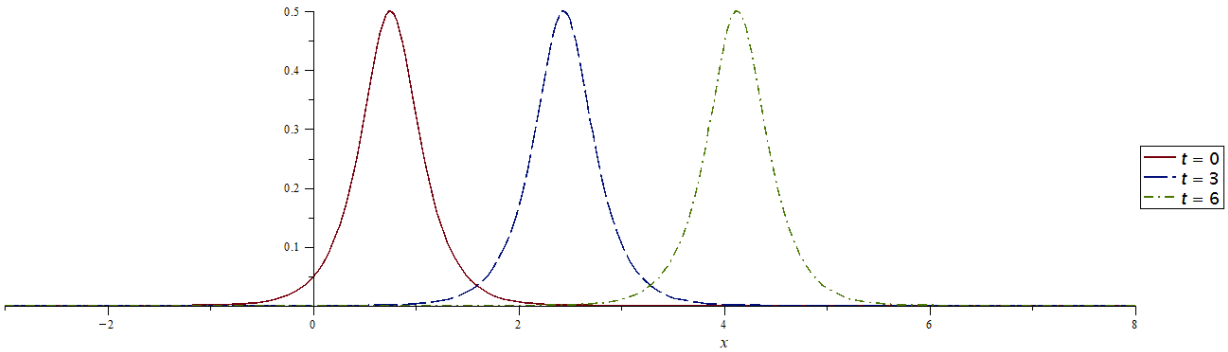
а ә б

а – $t = 0$; ә – $t = 3$; б – $t = 6$

Сурет 16 – Спектрлік параметр $\lambda = 1+i$ үшін (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеудің бір солитонды шешімінің 3D графиктері

Ескерту – Параметрлер: $x \in [-5,10]$ және $y \in [-5,10]$

16-суретте $|q^{[1]}|^2$-тің әр түрлі уақыт сәттеріндегі уақыт бойынша эволюциясы көрсетілген, ал 17-суретте 2D беттік графигі берілген. Қатты, нүктелі және нүктелі-сызықты сызықтар сәйкесінше осы уақыттарды білдіреді. Нәтижелер солитонның таралу кезінде локализацияланған және тұрақты профилін сақтайтынын айқын көрсетеді, бұл (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеуімен басқарылатын сызықты емес динамиканың интегралдылығын және серпімді сипатын растайды.



Сурет 17 – $|q^{[1]}|^2$ уақыт бойынша эволюциясы

Ескертулер:

1. Қатты, нүктелі және нүктелі-сызықты сызықтар сәйкесінше уақыт сәттері $t = 0$, $t = 3$ және $t = 6$ -ға сәйкес келеді
2. Параметрлері: $\alpha = 1,\ \beta = 1,\ \omega_1 = 2,\ \nu_1 = 1,\ \chi_1 = 1,\ \kappa_1 = 1$

Қорытындылай келе, алынған (121) теңдеу бір солитонды шешім толқынның таралу кезінде өзінің пішіні мен локализациясын сақтайтынын көрсетеді, бұл жүйенің тұрақтылығы мен интегралдылық сипатын растайды. Келесі бөлімде бұл тәсіл екі солитонды жағдайға кеңейтіліп, толқындардың өзара әрекеттесуі зерттеледі.

2-солитонды шешім. Енді (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеуінің 2-солитонды шешімін құруға көшеміз. Осы мақсатта келесі түрлендіру қарастырылады:

$$\Phi^{[2]} = L^{[2]}\Phi^{[1]},$$

мұнда Дарбу матрицасы $L^{[2]} = \lambda I + M^{[2]} + \lambda^{-1} I = (\lambda + \lambda^{-1})I + M^{[2]}$ деп анықталады. $\Phi^{[j]}$ өрістері ЛЖ жүйелерін қанағаттандырады

$$\Phi^{[2]}_x = U^{[2]}\Phi^{[2]}, \qquad \Phi^{[2]}_t = \Phi^{[2]}_y + W^{[2]}\Phi^{[2]}.$$

$L^{[2]}$ Дарбу матрицасы үйлесімділік шарттарын қанағаттандырады

$$L^{[2]}_x + L^{[2]}U^{[1]} = U^{[2]}L^{[2]}, \qquad L^{[2]}_t + L^{[2]}W^{[1]} = L^{[2]}_y + W^{[2]}L^{[2]}.$$

Меншікті функциялар тұрғысынан $M^{[2]}$ түрі

$$M^{[2]} = \frac{1}{\Delta^{[1]}}\begin{pmatrix} \lambda_3^{-1}|\Phi_1^{[1]}|^2 + \lambda_4^{-1}|\Phi_2^{[1]}|^2 & (\lambda_3^{-1} - \lambda_4^{-1})\Phi_1^{[1]}\bar{\Phi}_2^{[1]} \\ (\lambda_3^{-1} - \lambda_4^{-1})\bar{\Phi}_1^{[1]}\Phi_2^{[1]} & \lambda_4^{-1}|\Phi_2^{[1]}|^2 + \lambda_3^{-1}|\Phi_1^{[1]}|^2 \end{pmatrix},$$

ондағы $\lambda_4 = \bar{\lambda}_3$.

$\Phi^{[1]}$-нің құрауыштарын алу үшін 1-ретті ДТ қолданылады

$$\Phi^{[1]} = L^{[1]}\Phi^{[0]}, \tag{122}$$

(122) теңдеудегі

$$\Phi^{[0]} = \begin{pmatrix} \Psi_1(\lambda_1) & -\bar{\Psi}_2(\lambda_1) \\ \Psi_2(\lambda_1) & \bar{\Psi}_1(\lambda_1) \end{pmatrix}, \qquad L^{[1]} = \begin{pmatrix} \lambda_3 + \lambda_3^{-1} & b_0 \\ c_0 & \lambda_3 + \lambda_3^{-1} \end{pmatrix}. \tag{123}$$

(123) теңдеулерді (121) теңдеуге қойылады

$$\Psi^{[1]}=\begin{pmatrix}\Psi_1^{[1]} & -\bar{\Psi}_2^{[1]}\\ \Psi_2^{[1]} & \bar{\Psi}_1^{[1]}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\lambda_3+\lambda_3^{-1})\Psi_1+b_0\Psi_2 & -(\lambda_3+\lambda_3^{-1})\bar{\Psi}_2+b_0\bar{\Psi}_1\\ (\lambda_3+\lambda_3^{-1})\Psi_2-\bar{b}_0\Psi_1 & (\lambda_3+\lambda_3^{-1})\bar{\Psi}_1+\bar{b}_0\bar{\Psi}_2\end{pmatrix},$$

бұл жерде

$$\Psi_1^{[1]}=(\lambda_3+\lambda_3^{-1})\,|k_3|\,e^{i\vartheta_3+\rho_2+i\varepsilon_2}+b_0\,|k_4|\,e^{i\vartheta_4-\rho_2-i\varepsilon_2},$$
$$\Psi_2^{[1]}=(\lambda_3+\lambda_3^{-1})\,|k_4|\,e^{i\vartheta_4-\rho_2-i\varepsilon_2}-\bar{b}_0\,|k_3|\,e^{i\vartheta_3+\rho_2+i\varepsilon_2},$$
$$\Delta^{[1]}=2\,|k_3||k_4|\cosh(2(\zeta+\rho_2))\left[(\lambda_3+\lambda_3^{-1})^2+|b_0|^2\right].$$

және $\lambda_3=\alpha_3+i\beta_3$.

Нақты 2-солитонды шешім 1-ретті ДТ көмегімен алынған 1-ретті $q=0$ бастапқы шешімнен 2-ретті ДТ арқылы алынады

$$q^{[2]}=b_0+\frac{(\lambda_3-\bar{\lambda}_3^{-1})\,|k_3||k_4|}{\Delta^{[1]}}\left((\lambda_3+\lambda_3^{-1})^2e^{iX}-2(\lambda_3+\lambda_3^{-1})b_0\sinh(2(\zeta+\rho_2))-b_0^2e^{-iX}\right), \quad (124)$$

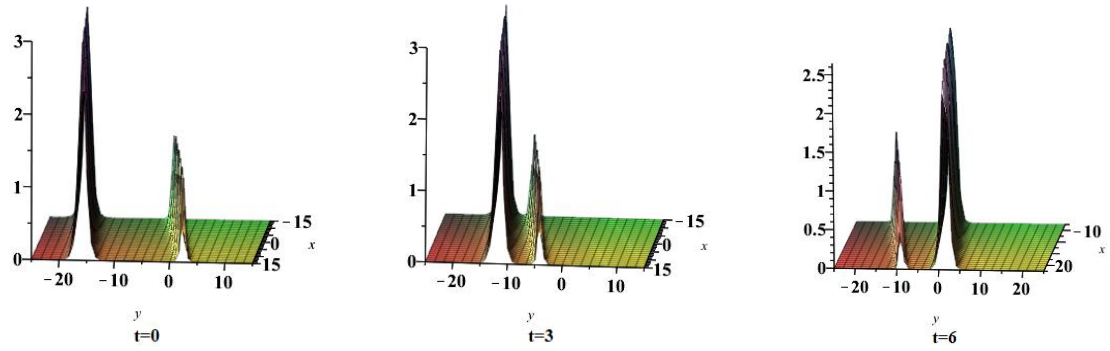
мұнда $X=\vartheta_1-\vartheta_2+\theta_1-\bar{\theta}_1$, $\rho_2=2\alpha_3\beta_3x-\nu_3y-\left(\nu_3+\frac{\alpha_3\beta_3}{2(\alpha_3^2+\beta_3^2)^2}\right)t-\chi_3,$

$$\varepsilon_2=-(\alpha_3^2-\beta_3^2)x+\omega_3y+\left(\omega_3+1-\frac{(\alpha_3^2-\beta_3^2)}{4(\alpha_3^2+\beta_3^2)^2}\right)t+\kappa_3,$$

$$k_3=|k_3|e^{i\vartheta_3},\quad k_4=|k_4|e^{i\vartheta_4},\quad \frac{|k_3|}{|k_4|}=e^{2\zeta},\quad \frac{|k_4|}{|k_3|}=e^{-2\zeta},\quad \vartheta_3,\vartheta_4,\zeta\in R.$$

(124) теңдеудің $q^{[2]}$ 2-солитонды шешімі 17, 18-суреттерде көрсетілген.

18-суретте $q^{[2]}$-тің 2D графигі көрсетілген, $|q^{[2]}|$өрісінің (x,y) жазықтығында екі локализацияланған амплитуда шыңын әр түрлі уақыт сәттерінде $t=0,3$ және 6 көрсетеді. $t=0$-де солитондар жақсы бөлініп, өткір және жоғары шыңдар көрсетеді. Уақыт өте келе шыңдардың орындары мен пішіндері өзгереді, бұл солитондардың өзара әрекеттесуін және таралуын бейнелейді. Осы өзгерістерге қарамастан, әрбір солитон өзінің сипаттамалық пішінін сақтайды, бұл сызықты емес теңдеулердің солитонды шешімдеріне тән қасиет.



а ә б

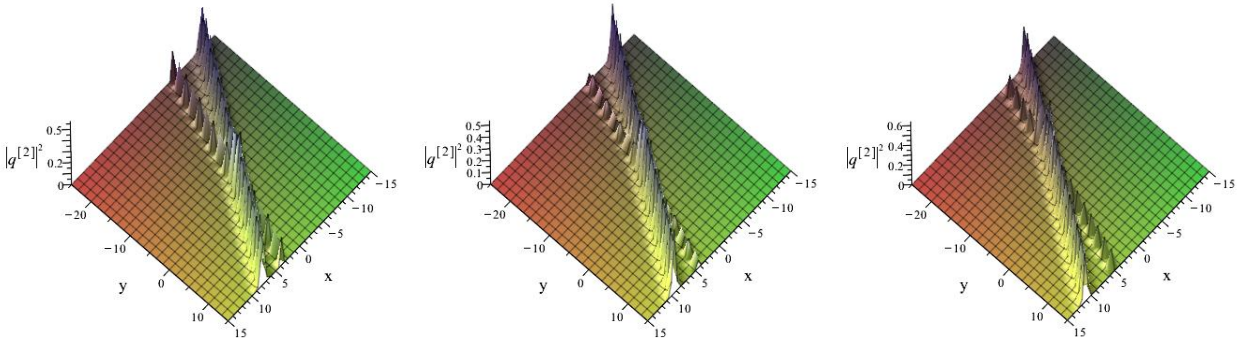
а – $t = 0$; ә – $t = 3$; б – $t = 6$

Сурет 18 – Әр түрлі уақыт моментеріндегі (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеудің екі солитонды шешімінің 3D графиктері

18-сурет 3D визуализацияны көрсетеді, екі солитонның серпімді соқтығысын айқындайды. $t = 0$, 3 және 6 уақыт моменттерінде көрсетіп тұрғандай, солитондар өзара әрекеттесіп, аз фазалық ауытқуларға ұшыраса да, соқтығысудан кейін өздерінің амплитудалары мен пішіндерін сақтайды. Бұл өзара әрекеттесудің серпімді сипатын және (2+1)-өлшемді ФЛ моделінің интегралдылығын растайды. Қолданылған параметрлер: $\alpha_4 = 2$, $\beta_4 = 2$, $\omega_3 = 2$ кеңістіктік аймақ: $x \in [-15,15]$ және $y \in [-25,25]$.

19-суретте (124) теңдеуімен берілген екі өлшемді 2-солитонды шешімнің графигі көрсетілген.

Жалпы алғанда, $q^{[2]}$ 2-солитонды шешім сызықты емес толқындардың оптикалық талшықтарда, плазмада немесе ферромагниттік ортада таралуының математикалық құрылымын және физикалық көрінісін көрсетеді, тұрақты және өзара әрекеттесетін солитон динамикасына түсінік береді.



а ә б

а – $t = 0$; ә – $t = 3$; б – $t = 6$

Сурет 19 – Әр түрлі уақыт моменттерінде екі қиылысып өткен сызықтық солитонның серпімді соқтығысын көрсететін (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеудің екі солитонды шешімінің 3D графиктері

Сонымен, аналитикалық және графикалық талдаулар негізгі параметрлердің солитон динамикасына әсерін айқындады, атап айтқанда олардың солитонның ені, амплитудасы, таралу жылдамдығы және фазалық құрылымын қалыптастырудағы рөлін көрсетті. Әсіресе, α және β параметрлері солитонның кеңістіктік ауқымы мен таралу жылдамдығын сипаттайды, бұл тікелей физикалық мәнге ие.

2.2 Екі компонентті (2+1)-өлшемді Фокас-Ленэллс теңдеуінің шешімдері

Сызықты емес толқын құбылыстары Забуски мен Крускалдың солитондарды ашуынан бері үлкен қызығушылық тудырды. Бұл құбылыстар ғылымның әр түрлі салаларында маңызды рөл атқарады және сызықты емес ДДТ-мен сипатталады. Солардың ішінде интегралданатын модельдер ерекше орын алады, себебі олар нақты аналитикалық шешімдерді алуға мүмкіндік береді. ФЛ теңдеуі осындай модельдердің бірі болып табылады және көбінесе сызықты емес орталарда өте қысқа оптикалық импульстардың таралуын сипаттау үшін қолданылады.

Бұл бөлімшеде екі компонентті (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеуі ұсынылады, ол бір жағынан көп режимді өзара әрекеттесулерді және екінші жағынан көп өлшемді эффектілерді ескереді. Сәйкес ЛЖ құрылып, ұсынылған жүйенің нақты бір және екі солитонды шешімдерін алу үшін ДТ әдісі қолданылды. Модельдің физикалық параметрлері – дисперсия, сызықтылық және өлшемдік әсерлер – солитонды шешімдердің құрылымына және модуляциялық тұрақсыздық спектріне елеулі әсер ететіні көрсетілді. Атап айтқанда, дисперсиялық мүшелер тұрақсыздық белдеуінің енін басқарады, сызықты емес өзара әрекеттесулер бұрмаланулардың амплитудасы мен өсу жылдамдығын анықтайды, ал қосымша кеңістіктік өлшем көлденең режимдер арқылы тұрақсыздық аймағын кеңейтеді.

ФЛ теңдеуінің көп компонентті жалпыламалары, интегралданатын жүйелердегі бірнеше өрістің өзара әрекеттесуін сипаттайтындықтан, ерекше көңіл аударуға лайық. [97-99]-те эрмиттік симметриялы кеңістіктерге негізделген ЛЖ-ры мен би-Гамильтондық құрылымдары бар ФЛ теңдеуінің көп компонентті интегралданатын жалпыламалары ұсынылған. [100]-де көп компонентті жүйе үшін ДТ әдісі дамытылып, сол арқылы солитондар мен кенеттен пайда болатын қиратушы толқындар сияқты локализацияланған шешімдерді құру мүмкін болды.

Түйіндес жүйелер үшін рекурсивті емес Дарбу әдісі [101]-де ұсынылып, жалпыланған қиратушы толқын шешімдерін алуға жол ашты. [102]-де екі компонентті ФЛ жүйелері үшін векторлық бинарлы ДТ енгізілді. [103]-те ДТ әдісі төрт компонентті ФЛ жүйесіне қолданылып, нақты шешімдер алынды. Ассоциацияланған ФЛ жүйесіне көп солитонды шешімдер Риман-Гильберт әдісі арқылы [104]-те құрылды. Үш компонентті туынды жүйе, оның ДТ және нақты солитонды шешімдері [105]-те зерттелген. Сонымен қатар, би-

Гамильтондық құрылымы мен ЛЖ бар ФЛ теңдеуінің векторлық жалпыламасы [106]-да ұсынылған. Бұл жұмыстар көп компонентті интегралданатын жүйелер теориясын кеңейтіп, сызықты емес оптика, фотоника және плазма физикасы үшін маңызды үлес қосады.

Бұл бөлімше ФЛ теңдеуіне негізделген көп компонентті (2+1)-өлшемді интегралданатын жүйелерді әрі қарай зерттеуге бағытталған. Біз жаңа екі компонентті (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеуін ұсынамыз, оның толық интегралдануын растайтын ЛЖ құрылпды. Біздің білуімізше, мұндай жүйе бұған дейін әдебиетте қарастырылмаған.

Ұсынылған екі компонентті (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеудің нақты аналитикалық шешімдерін алу үшін ДТ әдісі қолданылды. Кері шашырау әдісіне қарағанда әлдеқайда күрделі емес бұл әдіс көмегімен айқын түрде жүйелі шешімдер құрастыруға болады. 1-ретті және 2-ретті ДТ жасалып, олардың негізінде жаңа жүйенің бұрын белгісіз бір және екі солитонды шешімдері алынады. Шешімді құру барысында бастапқы (seed) шешім және ЛЖ-ның сәйкес меншікті функциялары таңдалады, осы негізде түрлендіру матрицасы түзіледі. Бұл процедураны бірнеше рет қайталап, күрделілігі жоғары шешімдерді алуға болады. Осылайша, ДТ интегралданатын көп компонентті (2+1)-өлшемді теңдеулермен жұмыс істеуде әрі теориялық тұрғыдан қатаң, әрі практикалық жағынан тиімді әдіс болып табылады.

Келесі бөлімшеде жаңа екі компонентті (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеуі және оның интегралдануын растайтын ЛК беріледі. Сонымен бірге, 1-ретті және 2-ретті ДТ және мүмкін болатын редукциялар қарастырылып, алынған түрлендірулер негізінде нақты аналитикалық бір және екі солитонды шешімдері шығарылады.

2.2.1 Екі компонентті (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеуі

Сызықты емес ортада өте қысқа импульстердің таралуы ең дәл түрде көп компонентті өріс модельдері шеңберінде сипатталады. Бұл бөлімшеде мұндай импульстердің кеңістік-уақыттық эволюциясын басқаратын, олардың көлденең айнымалыларға тәуелділігін және өріс құрауыштарының өзара әрекеттесуін ескеретін екі компонентті (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеуін шығарамыз. Бұл түрдегі теңдеулер оптикалық талшықтардағы, қос сыну кристалдарындағы, фотондық торлардағы және айқын сызықты емес реакциясы бар басқа да физикалық жүйелердегі сызықты емес процестерді модельдеуге кеңінен қолданылады.

Екі компонентті (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеуге сәйкес келетін ЛЖ келесі түрде беріледі [107]:

$$\Phi_x = U_1\Phi, \quad \Phi_t = \mu\Phi_y + W_1\Phi, \tag{125}$$

(125) теңдеудегі $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)^T$, U_1 және W_1 матрицалық операторларының түрлері

$$U_1 = -i\lambda^2\Sigma + \lambda Q, \qquad W_1 = W_0 + \frac{W_{-1}}{\lambda} + \frac{W_{-2}}{\lambda^2}, \tag{126}$$

мұнда

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & q_{1x} & q_{2x} \\ r_{1x} & 0 & 0 \\ r_{2x} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$W_0 = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}, \quad W_{-1} = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{pmatrix}, \quad W_{-2} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}.$$

$\Phi_{xt} = \Phi_{tx}$ үйлесімділік шартынан табылады:

$$U_{1t} - \mu U_{1y} - W_{1x} + [U_1, W_1] = 0. \tag{127}$$

(126) өрнектерін (127)-ге қойғанда анықталады

$$\lambda Q_t - \mu\lambda Q_y - W_{0x} - \frac{1}{\lambda}W_{-1x} - \frac{1}{\lambda^2}W_{-2x} - i\lambda^2[\Sigma, W_0] - i\lambda[\Sigma, W_{-1}] - i[\Sigma, W_{-2}] +$$
$$+\lambda[Q, W_0] + [Q, W_{-1}] + \frac{1}{\lambda}[Q, W_{-2}] = 0. \tag{128}$$

(128) теңдеуін λ дәрежелері бойынша жіктеу нәтижесінде шығады

$$c_{12} = c_{13} = c_{21} = c_{31} = 0,\ m_{11x} = m_{12x} = m_{13x} = m_{21x} = m_{22x} = m_{23x} = m_{31x} = m_{32x} = m_{33x} = 0,$$
$$n_{11x} = q_{1x}m_{21} + q_{2x}m_{31} - r_{1x}m_{12} - r_{2x}m_{13},\ n_{12x} = q_{1x}m_{22} + q_{2x}m_{32} - q_{1x}m_{11},$$
$$n_{13x} = q_{1x}m_{23} + q_{2x}m_{33} - q_{2x}m_{11},\ \ n_{21x} = r_{1x}m_{11} - r_{1x}m_{22} - r_{2x}m_{23},\ \ n_{22x} = r_{1x}m_{12} - q_{1x}m_{21},$$
$$n_{23x} = r_{1x}m_{13} - q_{2x}m_{21},\ \ n_{31x} = r_{2x}m_{11} - r_{1x}m_{32} - r_{2x}m_{33},\ \ n_{32x} = r_{2x}m_{12} - q_{1x}m_{31},$$
$$n_{33x} = r_{2x}m_{13} - q_{2x}m_{31}.\ c_{11x} = q_{1x}n_{21} + q_{2x}n_{31} - r_{1x}n_{12} - r_{2x}n_{13},$$
$$c_{12x} = -2im_{12} + q_{2x}n_{32} - q_{1x}n_{1122},\ c_{13x} = -2im_{13} + q_{1x}n_{23} - q_{2x}n_{1133},$$
$$c_{21x} = 2im_{21} - r_{2x}n_{23} + r_{1x}n_{1122},\ \ c_{22x} = r_{1x}n_{12} - q_{1x}n_{21},\ \ c_{23x} = r_{1x}n_{13} - q_{2x}n_{21},$$
$$c_{31x} = 2im_{31} - r_{1x}n_{32} + r_{2x}n_{1133},\ \ c_{32x} = r_{2x}n_{12} - q_{1x}n_{31},\ \ c_{33x} = r_{2x}n_{13} - q_{2x}n_{31}.$$

Сонымен бірге,

$$q_{1xt} - \mu q_{1xy} - 2in_{12} - q_{1x}c_{1122} + q_{2x}c_{32} = 0, \tag{129}$$

$$q_{2xt} - \mu q_{2xy} - 2in_{13} - q_{2x}c_{1133} + q_{1x}c_{23} = 0, \tag{130}$$

$$r_{1xt} - \mu r_{1xy} + 2in_{21} + r_{1x}c_{1122} - r_{2x}c_{23} = 0, \tag{131}$$

$$r_{2xt} - \mu r_{2xy} + 2in_{31} + r_{2x}c_{1133} - r_{1x}c_{32} = 0. \tag{132}$$

Келесі белгілеулері енгізіледі

$$m_{11} = -\frac{i}{4}, \quad m_{22} = \frac{i}{4}, \quad m_{33} = \frac{i}{4}, \quad m_{12} = m_{13} = m_{21} = m_{23} = m_{31} = m_{32} = 0.$$

Нәтижесінде бірқатар ықшамдаулар мен интегралдаулардан кейін алынады

$$n_{12} = \frac{i}{2}q_1, \quad n_{13} = \frac{i}{2}q_2, \quad n_{21} = -\frac{i}{2}r_1, \quad n_{31} = -\frac{i}{2}r_2,$$

$$c_{11} = -\frac{i}{2}r_1q_1 - \frac{i}{2}r_2q_2 + i, \quad c_{22} = \frac{i}{2}r_1q_1 - i, \quad c_{23} = \frac{i}{2}r_1q_2, \quad c_{32} = \frac{i}{2}q_1r_2, \quad c_{33} = \frac{i}{2}q_2r_2 - i.$$

Соңында, $\mu = 1$ деп таңдалған жағдайда (129)-(132) теңдеулерге қойсақ, екі компонентті (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеудің нақты түрі шығады:

$$iq_{1xt} - iq_{1xy} + iq_1 - q_1r_1q_{1x} + 2q_{1x} - \frac{1}{2}q_2r_2q_{1x} - \tfrac{1}{2}q_1r_2q_{2x} = 0, \tag{133}$$

$$iq_{2xt} - iq_{2xy} + iq_2 - q_2r_2q_{2x} + 2q_{2x} - \frac{1}{2}q_1r_1q_{2x} - \frac{1}{2}q_2r_1q_{1x} = 0, \tag{134}$$

$$ir_{1xt} - ir_{1xy} + ir_1 + q_1r_1r_{1x} - 2r_{1x} + \frac{1}{2}q_2r_2r_{1x} + \frac{1}{2}q_2r_1r_{2x} = 0, \tag{135}$$

$$ir_{2xt} - ir_{2xy} + ir_2 + q_2r_2r_{2x} - 2r_{2x} + \frac{1}{2}q_1r_1r_{2x} + \frac{1}{2}q_1r_2r_{1x} = 0. \tag{136}$$

(133)-(136) теңдеулері үшін сәйкес ЛЖ келесі түрде беріледі:

$$\Phi_x = U_1\Phi, \tag{137}$$

$$\Phi_t = \Phi_y + W_1\Phi, \tag{138}$$

мұнда

$$U_1 = -i\lambda^2\Sigma + \lambda Q, \qquad W_1 = W_0 + \frac{1}{\lambda}W_{-1} - \frac{i}{4\lambda^2}\Sigma, \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & q_{1x} & q_{2x} \\ \bar{q}_{1x} & 0 & 0 \\ \bar{q}_{2x} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$W_0 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2}(q_1r_1 + q_2r_2 - 2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{i}{2}q_1r_1 - i & \frac{i}{2}r_1q_2 \\ 0 & \frac{i}{2}q_1r_2 & \frac{i}{2}q_2r_2 - i \end{pmatrix}, \; W_{-1} = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & q_1 & q_2 \\ -r_1 & 0 & 0 \\ -r_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Осылайша, екі компонентті (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеуін және оның ЛЖ-н нақты түрде шығардық. Бұл құрастыру ДТ арқылы кейінгі солитонды шешімдерді алудың негізін қалыптастырады.

2.2.2 Дарбу түрлендіруі

ДТ интегралданатын жүйелердің нақты солитонды шешімдерін құру үшін ең қуатты және әмбебап әдістердің бірі болып табылады. Ол жаңа шешімдерді қарапайым немесе бұрынғыдан белгілі шешімдерден жүйелі түрде алуға мүмкіндік береді, сонымен қатар модельдің интегралдануын және Лакс құрылымын сақтайды. Әдістің алгоритмдік қарапайымдылығы, есептеу тиімділігі және көп өлшемді, көп компонентті жүйелерді өңдей алу қабілеті оны сызықты емес эволюциялық теңдеулерді зерттеуде кеңінен қолдануға мүмкіндік береді.

Бұл бөлімшеде екі компонентті (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеуінің солитонды шешімдерін алу үшін 1-ретті және 2-ретті ДТ нақты түрде құрылады.

1-ретті ДТ. Алдымен, (133)-(136) теңдеулері үшін 1-ретті ДТ шығарамыз. Түрлендіруді келесі формада қарастырылады

$$\Phi^{[1]} = L_1\Phi.$$

Дарбу матрицасымен $L_1 = \lambda A_1 + B_1 + \lambda^{-1}K_1$, мұндағы A_1, B_1 және K_1 3×3 өлшемді анықталуға тиісті матрицалар және олар келесі түрде беріледі:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \quad K_1 = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix}.$$

L_1 матрицасы (137) және (138) теңдеулерімен сәйкестігі сақталатын жаңа ЛЖ-н тудыруы үшін, ол келесі айқастыру қатынастарын қанағаттандыруы тиіс:

$$L_{1x} + L_1U_1 = U_1^{[1]}L_1, \tag{139}$$

$$L_{1t} + L_1 W_1 = L_{1y} + W_1^{[1]} L_1. \tag{140}$$

(139) және (140) теңдеулерін λ дәрежелері бойынша жіктеп, матрицаларды құрауыштары арқылы жазғанда табылады

$$k_{11x} = k_{12x} = k_{13x} = k_{21x} = k_{22x} = k_{23x} = k_{31x} = k_{32x} = k_{33x} = 0, \quad a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{31} = 0,$$
$$k_{12} = k_{13} = k_{21} = k_{31} = 0, \quad b_{12} + k_{11} q_1 - q_1^{[1]} k_{22} - q_2^{[1]} k_{32} = 0,$$
$$b_{13} + k_{11} q_2 - q_1^{[1]} k_{23} - q_2^{[1]} k_{33} = 0, \quad b_{21} + k_{22} r_1 + r_2 k_{23} - r_1^{[1]} k_{11} = 0,$$
$$b_{31} + k_{32} r_1 + r_2 k_{33} - r_2^{[1]} k_{11} = 0.$$

Бұл жағдайда $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1$, $k_{11} = k_{22} = k_{33} = 1$ және $b_{11} = b_{22} = 0$, $b_{33} = b_{23} = b_{32} = 0$, $k_{23} = k_{32} = a_{23} = a_{32} = 0$ деп алсақ, L_1 Дарбу матрицасы келесі ықшамды түрге келеді:

$$L_1 = \lambda I + B_1 + \lambda^{-1} I, \tag{141}$$

мұнда I бірлік матрица.

Осылайша, екі компонентті (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеуі (133)-(136) үшін 1-ретті ДТ-нің түрі

$$q_1^{[1]} = q_1 + b_{12}, \tag{142}$$

$$q_2^{[1]} = q_2 + b_{13}, \tag{143}$$

$$r_1^{[1]} = r_1 + b_{21}, \tag{144}$$

$$r_2^{[1]} = r_2 + b_{31}. \tag{145}$$

Бұл құрылым нақты бір солитонды және көп солитонды шешімдерді шығару үшін негіз қалайды, осылайша екі компонентті (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеуін талдауда Дарбу әдісінің тиімділігі мен әмбебаптығын көрсетеді.

Меншікті функциялармен өрнектелген 1-ретті ДТ. $(\psi_1, \psi_2, \psi_3)^T$ – спектрлік параметр $\lambda \in R$ сәйкес келетін (137) және (138) теңдеулері сызықты жүйесінің векторлық шешімі болсын. ЛЖ-ның симметриялығынан жүйенің меншікті функциясының түйіндес бағаны $(-\bar{\psi}_2, \bar{\psi}_1, \bar{\psi}_3)^T$ осы жүйенің $\bar{\lambda}$ (мұндағы жоғары сызық түйіндесін білдіреді) спектрлік мәніне сәйкес келетін шешімі болып табылатыны шығады. Енді былай болсын:

$$B_1 = H \Lambda^{-1} H^{-1}, \tag{146}$$

мұнда H меншікті функциялар матрицасы, яғни

$$H=\begin{pmatrix}\psi_1(\lambda_1,t,x,y) & -\bar{\psi}_2(\lambda_1,t,x,y) & -\bar{\psi}_3(\lambda_1,t,x,y)\\ \psi_2(\lambda_1,t,x,y) & \bar{\psi}_1(\lambda_1,t,x,y) & 0\\ \psi_3(\lambda_1,t,x,y) & 0 & \bar{\psi}_1(\lambda_1,t,x,y)\end{pmatrix},$$

$$H^{-1}=\frac{1}{h\bar{\psi}_1}\begin{pmatrix}\bar{\psi}_1^2 & \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 & \bar{\psi}_1\bar{\psi}_3\\ -\bar{\psi}_1\psi_2 & |\psi_1|^2+|\psi_3|^2 & -\psi_2\bar{\psi}_3\\ -\bar{\psi}_1\psi_3 & -\bar{\psi}_2\psi_3 & |\psi_1|^2+|\psi_2|^2\end{pmatrix},\quad \Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix},\quad (147)$$

бұл жердегі $\lambda_2=\lambda_3=\bar{\lambda}_1$ және $h=|\psi_1|^2+|\psi_2|^2+|\psi_3|^2$.

Осы (147) өрнектерді (146) теңдеуіне қойсақ, B_1 матрицасының нақты түрі алынады

$$B_1=\frac{1}{h}\begin{pmatrix}\frac{|\psi_1|^2}{\lambda_1}+\frac{|\psi_2|^2}{\lambda_2}+\frac{|\psi_3|^2}{\lambda_3} & \frac{\psi_1\bar{\psi}_2}{\lambda_1}-\frac{\psi_1\bar{\psi}_2}{\lambda_2}+\frac{\bar{\psi}_2|\psi_3|^2\left(\lambda_3^{-1}-\lambda_2^{-1}\right)}{\bar{\psi}_1} & \frac{\psi_1\bar{\psi}_3}{\lambda_1}-\frac{\psi_1\bar{\psi}_3}{\lambda_3}+\frac{\bar{\psi}_3|\psi_2|^2\left(\lambda_2^{-1}-\lambda_3^{-1}\right)}{\psi_1^*}\\ \bar{\psi}_1\psi_2 & \frac{|\psi_2|^2}{\lambda_1}+\frac{|\psi_1|^2+|\psi_3|^2}{\lambda_2} & \psi_2\bar{\psi}_3\\ \bar{\psi}_1\psi_3 & \bar{\psi}_2\psi_3 & \frac{|\psi_3|^2}{\lambda_1}+\frac{|\psi_1|^2+|\psi_2|^2}{\lambda_3}\end{pmatrix}.$$

Осы өрнекті (142) және (143) теңдеулеріне қойғанда, 1-ретті ДТ жаңа өріс айнымалылары үшін келесі нақты өрнектерді береді:

$$q_1^{[1]}=q_1+\frac{1}{h}\left(\left(\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_1\lambda_2}\right)\psi_1\bar{\psi}_2+\left(\frac{\lambda_2-\lambda_3}{\lambda_2\lambda_3}\right)\frac{\bar{\psi}_2|\psi_3|^2}{\bar{\psi}_1}\right),\quad (148)$$

$$q_2^{[1]}=q_2+\frac{1}{h}\left(\left(\frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_1\lambda_3}\right)\psi_1\bar{\psi}_3+\left(\frac{\lambda_3-\lambda_2}{\lambda_2\lambda_3}\right)\frac{\bar{\psi}_3|\psi_2|^2}{\bar{\psi}_1}\right).\quad (149)$$

Бұл формулалар меншікті функциялар арқылы 1-ретті ДТ нақты түрде береді, ол жоғары ретті ДТ-лері мен көп солитонды шешімдерді құрудың негізін құрайды.

2-ретті ДТ. Осы бөлімшеде (133)-(136) жүйесіне сәйкес 2-ретті ДТ-нің нақты түрін шығарамыз. Бұл 1-ретті ДТ-ін жалғастырады және 2-солитонды шешімдер сияқты жоғары ретті шешімдерді жүйелі түрде алуға мүмкіндік береді. Мұны іске асыру үшін, алдымен келесі түрлендіруі қарастырылады:

$$\Phi^{[2]}=L_2\Phi^{[1]},\quad (150)$$

мұнда $L_2=\lambda I+B_2+\lambda^{-1}I$ 2-ретті Дарбу матрицасын білдіреді.

Сонда (150) теңдеу келесі түрде қайта жазылады:

$$\Phi^{[2]} = (\lambda I + B_2 + \lambda^{-1} I)(\lambda I + B_1 + \lambda^{-1} I)\Phi = \left((\lambda^2 + \lambda^{-2} + 2)l_2^0 + (\lambda + \lambda^{-1})l_2^1 + l_2^2\right)\Phi.$$

Ыңғайлылық үшін белгілеуді енгізейік: $l_2^1 = B_1 + B_2$, $l_2^2 = B_2 B_1$, $l_2^0 = I$, мұндағы B_1 және B_2 матрицаларының түрлері

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & 0 & 0 \\ b_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & b_{12}^{[1]} & b_{13}^{[1]} \\ b_{21}^{[1]} & 0 & 0 \\ b_{31}^{[1]} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Осылайша, L_2 түрі

$$L_2 = (\lambda^2 + \lambda^{-2} + 2)l_2^0 + (\lambda + \lambda^{-1})l_2^1 + l_2^2. \tag{151}$$

ДТ-нің ЛЖ-на сәйкестігі келесі қатынастарды қанағаттандыруды талап етеді:

$$L_{2x} + L_2 U_1 = U_1^{[2]} L_2, \tag{152}$$

$$L_{2t} + L_2 W_1 = L_{2y} + W_1^{[2]} L_2. \tag{153}$$

(152) және (153) теңдеулерді λ дәрежелері бойынша жіктеп, байланыстарды талдай отырып, 2-ретті ДТ-нің нақты түрі алынады

$$q_1^{[2]} = q_1 + b_{12} + b_{12}^{[1]}, \tag{154}$$

$$q_2^{[2]} = q_2 + b_{13} + b_{13}^{[1]}, \tag{155}$$

$$r_1^{[2]} = r_1 + b_{21} + b_{21}^{[1]}, \tag{156}$$

$$r_2^{[2]} = r_2 + b_{31} + b_{31}^{[1]}. \tag{157}$$

Бұл нәтиже екі компонентті (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеуінің нақты 2-солитонды шешімдерін құру үшін негізгі алгебралық негізді қамтамасыз етеді.

Редукция. Алдыңғы бөлімшеде қарастырылып отырған сызықты жүйе (74) және (75) үшін 1-ретті және 2-ретті ДТ құрылған болатын. ДТ матрицалық түрлендірулері (141) және (151) теңдеулерімен берілген, ал өріс айнымалыларының түрлендірулері тиісінше (142)-(145) және (154)-(157)

өрнектері арқылы анықталады. Сонымен қатар, екі компонентті (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеуі үшін сәйкес келетін редукция [107, p. 108517] орындалған.

Өріс айнымалылары арасындағы үйлесімділік келесідей

$$r_1 = -\bar{q}_1, \qquad r_2 = -\bar{q}_2,$$

бұлар ДТ кезінде өзгеріссіз қалуы тиіс. Енді, сызықты жүйе (137) және (138) үшін $\lambda = \lambda_1$ параметрімен алынған шешім $(\psi_1, \psi_2, \psi_3)^T$ қатысты, $(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \bar{\psi}_3)^T$ векторы жаңа сызықты жүйе (137) және (138) үшін $\lambda = \bar{\lambda}_1$ параметрімен де шешім болатынын байқаймыз. Сондықтан оны 2-ретті ДТ үшін бастапқы (seed) шешім ретінде қолданамыз, яғни $\varphi_1 = (\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \bar{\varphi}_3)^T$, $\lambda_5 = \bar{\lambda}_4$ -мен.

2.2.3 Солитонды шешімдер

Осы бөлімшеде алдыңғы бөлімшеде алынған ДТ қолдана отырып, екі компонентті (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеуі (154)-(157) үшін нақты солитонды шешімдер құрамыз. ДТ бастапқы (seed) шешімнен жаңа шешімдерді жүйелі және тиімді түрде құруға мүмкіндік береді, осылайша бейсызықты толқындардың кең отбасына жол ашады. Атап айтқанда, 1- және 2-солитонды шешімдердің нақты өрнектерін аламыз, бұл интегралды жүйенің негізгі солитондық табиғатын көрсетеді [108-110].

1-солитонды шешімі. Алдымен 1-солитонды шешімді құрайық. Бастапқы (seed) шешім ретінде $q_1 = q_2 = 0$ аламыз. Осы таңдауды сәйкес (74) және (75) сызықты жүйеге орнықтыру келесі жүйені береді:

$$\psi_{1x} = -i\lambda^2\psi_1, \quad \psi_{2x} = i\lambda^2\psi_2, \quad \psi_{3x} = i\lambda^2\psi_3, \quad \psi_{1t} = \psi_{1y} + i\left(1 - \frac{1}{4\lambda^2}\right)\psi_1,$$
$$\psi_{2t} = \psi_{2y} - i\left(1 - \frac{1}{4\lambda^2}\right)\psi_2, \quad \psi_{3t} = \psi_{3y} - i\left(1 - \frac{1}{4\lambda^2}\right)\psi_3. \tag{158}$$

(158) теңдеу экспоненциалдық типтегі нақты шешімдерді қабылдайды

$$\psi_1 = l_1 e^{-i\lambda^2 x + iM_1 y + i\left(M_1 + 1 - \frac{1}{4\lambda^2}\right)t + i\delta_1} = l_1 e^{\theta_1}, \tag{159}$$

$$\psi_2 = l_2 e^{i\lambda^2 x + iM_2 y + i\left(M_2 - 1 + \frac{1}{4\lambda^2}\right)t + i\delta_2} = l_2 e^{\theta_2}, \tag{160}$$

$$\psi_3 = l_3 e^{i\lambda^2 x + iM_3 y + i\left(M_3 - 1 + \frac{1}{4\lambda^2}\right)t + i\delta_3} = l_3 e^{\theta_3}, \tag{161}$$

мұнда $\lambda, l_n, M_n, \delta_n$ $(n = 1,2,3)$ комплекті параметрлер. Атап айтқанда, $\lambda = \alpha + i\beta$, $M_n = \omega_n + i\nu_n$, $\delta_n = \kappa_n + i\tau_n$, бұндағы $\alpha, \beta, \omega_n, \nu_n, \kappa_n, \tau_n \in R$.

Үйлесімділік шарттарын $\omega_3 = \omega_2 = -\omega_1$, $\nu_3 = \nu_2 = -\nu_1$, $\kappa_3 = \kappa_2 = -\kappa_1$, $\tau_3 = \tau_2 = -\tau_1$ және $l_2 = l_3$ таңдау арқылы шешімнің құрылымын жеңілдететін $\theta_3 = \theta_2 = -\theta_1$ және $\psi_2 = \psi_3$ қатынастары алынады.

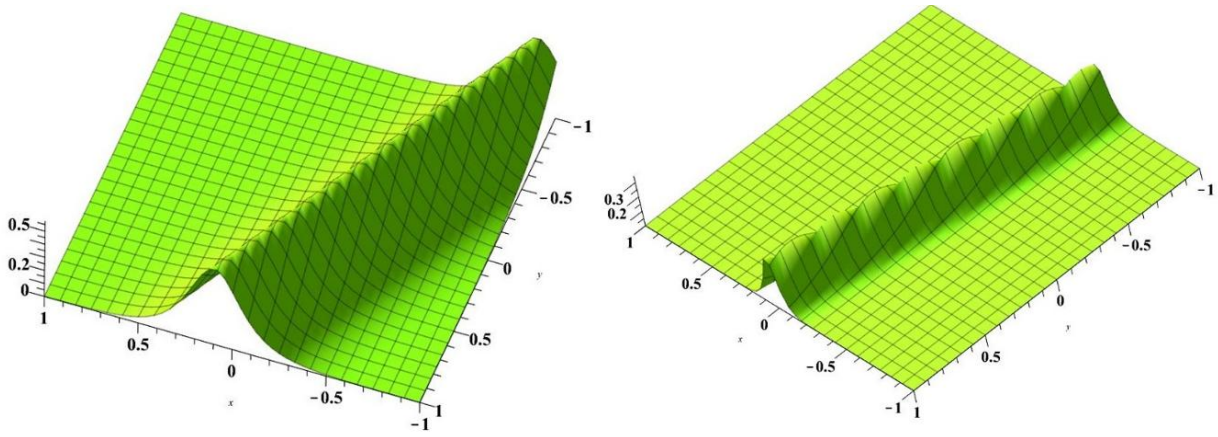
Осы өрнектерді ДТ формулаларына (148) және (149) орнына қойғанда, 1-солитонды шешім келесі түрде болады:

$$q_1^{[1]} = q_2^{[1]} = \frac{\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\bar{\lambda}}\right) e^{i(\vartheta_1 - \vartheta_2 + \theta_1 - \bar{\theta}_1)}}{\left(2\cosh 2(\vartheta + \theta_1 + \bar{\theta}_1) + e^{-2i(\vartheta + \theta_1 + \bar{\theta}_1)}\right)}. \qquad (162)$$

Ондағы $\theta_1 = -i\lambda^2 x + iM_1 y + i\left(M_1 + 1 - \frac{1}{4\lambda^2}\right)t + i\delta_1$. бұл жерде $\theta_1 = \rho + i\varepsilon$ түрінде жорамал және нақты мүшелері жинақтап жазылады

$$\rho = 2\alpha\beta x - \nu_1 y - \left(\nu_1 + \frac{\alpha\beta}{2(\alpha^2 + \beta^2)^2}\right)t - \tau_1,$$

$$\varepsilon = -(\alpha^2 - \beta^2)x + \omega_1 y + \left(\omega_1 + 1 - \frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{4(\alpha^2 + \beta^2)^2}\right)t + \kappa_1.$$



а ә

а – $\lambda = 1 + i$; ә – $\lambda = 1 + 3i$

Сурет 20 – $q_1^{[1]}$ шешімге сәйкес келетің $t = 0.5$ кезіндегі солитонның таралуы, параметрлер: $M_1 = 1 + i$, $\delta_1 = 1$

20-суреттен көрініп тұрғанымыздай, (162) теңдеу 1-солитонды шешімнің таралуы параметр λ-ның өзгеруімен өзгереді. Мысалы, $\lambda = 1 + i$ кезінде шешімнің амплитудасы жоғары болады, ал $\lambda = 1 + 3i$ кезінде ол орташа амплитуда мен ені бар, әлдеқайда локализацияланған шешімге айналады.

Бұл жағдайда, (159)-(161) теңдеулер мынадай қарапайым түрге келеді:

$$\psi_1 = l_1 e^{\rho + i\varepsilon}, \tag{163}$$

$$\psi_2 = l_2 e^{-\rho - i\varepsilon}, \tag{164}$$

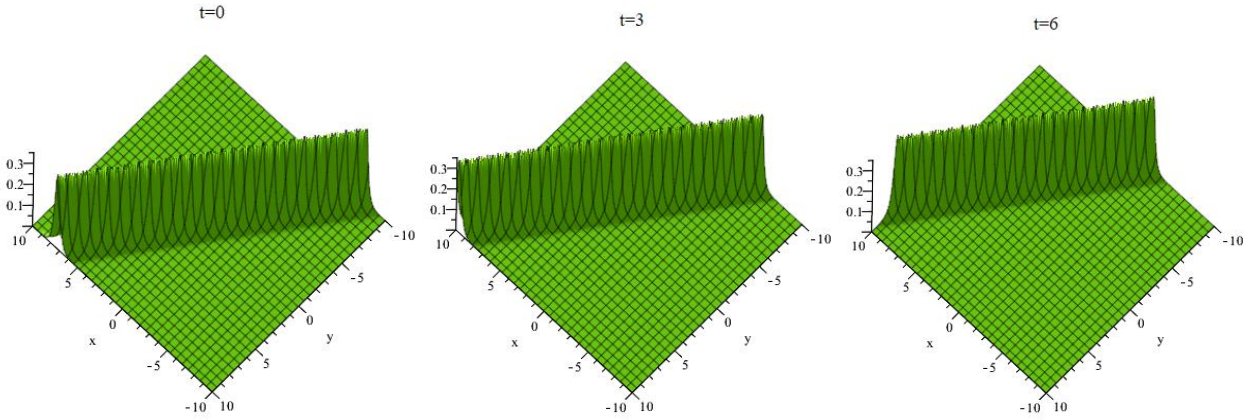
мұнда $l_1 = |l_1| e^{i\vartheta_1}$, $\overline{l_1} = |l_1| e^{-i\vartheta_1}$, $l_2 = |l_2| e^{i\vartheta_2}$, $\overline{l_2} = |l_2| e^{-i\vartheta_2}$, $\frac{|l_1|}{|l_2|} = e^{2\vartheta}$, $\frac{|l_2|}{|l_1|} = e^{-2\vartheta}$ және $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta \in R$.

Осылайша, (163) және (164) теңдеулерді (154) және (155) теңдеулерге қойып, екі компонентті (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеуінің нақты 1-солитонды шешімін былай жазуға болады

$$q_1^{[1]} = q_2^{[1]} = -\frac{2i\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \frac{e^{i(\vartheta_1 - \vartheta_2 + 2\varepsilon)}}{\left(2\cosh 2(\vartheta + \rho) + e^{-2(\vartheta + \rho)}\right)} \tag{165}$$

немесе балама түрде

$$q_1^{[1]} = q_2^{[1]} = -\frac{i\beta e^{i(\vartheta_1 - \vartheta_2 + 2\varepsilon)} \left(\cosh 2(\vartheta + \rho) + \sinh 2(\vartheta + \rho)\right)}{(\alpha^2 + \beta^2)\left(\cosh^2 2(\vartheta + \rho) + \cosh 2(\vartheta + \rho)\sinh 2(\vartheta + \rho) + 1\right)}.$$

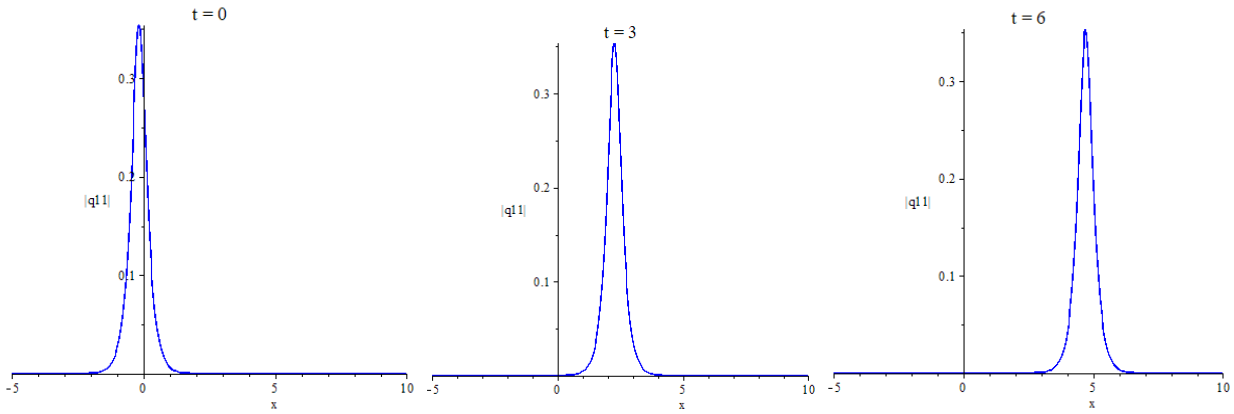


а ә б

а – $t = 0$; ә – $t = 3$; б – $t = 6$

Сурет 21 – $\left|q_1^{[1]}\right|^2 = \left|q_2^{[1]}\right|^2$ бір солитонды шешімнің 3D уақыт бойынша эволюциясы әр түрлі уақыт сәттерінде

Ескерту – Параметрлері: $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\omega_1 = 1$, $\nu_1 = 1.5$, $\tau_1 = 1$ және $\kappa_1 = 1.5$, $x \in [-10,10]$ және $y \in [-10,10]$



а ә б

а – $t = 0$; ә – $t = 3$; б – $t = 6$

Сурет 22 – $\left|q_1^{[1]}\right|^2 = \left|q_2^{[1]}\right|^2$ бір солитонды шешімнің 2D уақыт бойынша эволюциясы әр түрлі уақыт сәттерінде

Ескерту – Параметрлері: $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\omega_1 = 1$, $\nu_1 = 1.5$, $\tau_1 = 1$ және $\kappa_1 = 1.5$, $x \in [-10,10]$

21, 22-суреттерде (165) теңдеудің бір солитонды шешімінің 3D және 2D уақыт бойынша эволюциясы көрсетілген, әр түрлі уақыт моменттерінде: (a) $t = 0$, (b) $t = 3$ және (c) $t = 6$, параметрлермен $\alpha = 1$, $\beta = 1, \omega_1 = 1$, $\nu_1 = 1.5$, $\tau_1 = 1$ және $\kappa_1 = 1.5$.

21-суретте көрсетілгендей, графиктер бір толқынның x ось бойымен таралу динамикасын көрсетеді. Шешім үйлесімділік шартын қанағаттандырады, бұл екі $q_1^{[1]} = q_2^{[1]}$ өрістің де құрылымының бірдей екенін білдіреді. $t = 0$ бастапқы уақытта толқын шоғырланған, айқын шыңды профильге ие болып, шектеулі кеңістік аймағында орналасады және нөлге тең емес тұрақты фонның үстінде жатады. Бұл жарқын солитонға сәйкес келеді және тұрақты, локализацияланған энергия импульсінің бар екенін көрсетеді. Уақыт өткен сайын ($t = 3,6$) толқын өз пішіні мен амплитудасын сақтай отырып, x осі бойымен жылжиды. Мұндай мінез-құлық солитондарға тән. Толқын профилі симметриялы және тегіс болып қала береді, бұл шешімнің бейсызықты эволюция контекстінде локализацияланған және тұрақты екенін растайды.

2-солитонды шешім. Енді екі компонентті (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеуінің екі солитонды шешімін құруға көшеміз. Бұл шешім 2-ретті ДТ арқылы алынады, ол 1-ретті жағдайды кеңейтеді және әр түрлі солитонды режимдер арасындағы бейсызықты өзара әрекеттесуді жасауға мүмкіндік береді.

$\Phi^{[2]} = L_2\Phi^{[1]}$ түрлендіруін қарастырайық, мұндағы $L_2 = \lambda I + B_2 + \lambda^{-1}I = (\lambda + \lambda^{-1})I + B_2$.

Меншікті функциялар арқылы B_2 матрица мына түрде беріледі

$$B_2 = \frac{1}{h^{[1]}}\begin{pmatrix} \frac{|\varphi_1^{[1]}|^2}{\lambda_4}+\frac{|\varphi_2^{[1]}|^2}{\lambda_5}+\frac{|\varphi_3^{[1]}|^2}{\lambda_6} & \Lambda_1\varphi_1^{[1]}\bar{\varphi}_2^{[1]}+\frac{\Lambda_2\bar{\varphi}_2^{[1]}|\varphi_3^{[1]}|^2}{\bar{\varphi}_1^{[1]}} & \Lambda_1\varphi_1^{[1]}\bar{\varphi}_3^{[1]}+\Lambda_2\bar{\varphi}_3^{[1]}|\varphi_2^{[1]}|^2 \\ \bar{\varphi}_1^{[1]}\varphi_2^{[1]} & \frac{|\varphi_2^{[1]}|^2}{\lambda_4}+\frac{|\varphi_1^{[1]}|^2+|\varphi_3^{[1]}|^2}{\lambda_5} & \varphi_2^{[1]}\bar{\varphi}_3^{[1]} \\ \bar{\varphi}_1^{[1]}\varphi_3^{[1]} & \bar{\varphi}_2^{[1]}\varphi_3^{[1]} & \frac{|\varphi_3^{[1]}|^2}{\lambda_4}+\frac{|\varphi_1^{[1]}|^2+|\varphi_2^{[1]}|^2}{\lambda_6} \end{pmatrix},$$

мұнда $\Lambda_1 = \left(\frac{1}{\lambda_4}-\frac{1}{\lambda_5}\right)$, $\Lambda_2 = \left(\frac{1}{\lambda_5}-\frac{1}{\lambda_6}\right)$ және $\lambda_6 = \lambda_5 = \bar{\lambda}_4$.

Матрицаның элементтерін есептеу үшін 1-ретті ДТ-ін мына түрде қолданылады

$$\Phi^{[1]} = L_1\Phi^{[0]}. \tag{166}$$

Бұл жердегі

$$\Phi^{[0]} = \begin{pmatrix} \varphi_1(\lambda_4) & -\bar{\varphi}_2(\lambda_4) & -\bar{\varphi}_3(\lambda_4) \\ \varphi_2(\lambda_4) & \bar{\varphi}_1(\lambda_4) & 0 \\ \varphi_3(\lambda_4) & 0 & \bar{\varphi}_1(\lambda_4) \end{pmatrix},\quad L_1 = \begin{pmatrix} \lambda_4+\lambda_4^{-1} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & \lambda_4+\lambda_4^{-1} & 0 \\ b_{31} & 0 & \lambda_4+\lambda_4^{-1} \end{pmatrix}. \tag{167}$$

(167) теңдеулерді (166) теңдеуге қойғанда алынады

$$\Phi^{[1]} = \begin{pmatrix} (\lambda_4+\lambda_4^{-1})\varphi_1+b_{12}\varphi_2+b_{13}\varphi_3 & -(\lambda_4+\lambda_4^{-1})\bar{\varphi}_2+b_{12}\bar{\varphi}_1 & -(\lambda_4+\lambda_4^{-1})\bar{\varphi}_3+b_{13}\bar{\varphi}_1 \\ b_{21}\varphi_1+(\lambda_4+\lambda_4^{-1})\varphi_2 & -b_{21}\bar{\varphi}_2+(\lambda_4+\lambda_4^{-1})\bar{\varphi}_1 & -b_{21}\bar{\varphi}_3 \\ b_{31}\varphi_1+(\lambda_4+\lambda_4^{-1})\varphi_3 & -b_{31}\bar{\varphi}_2 & -b_{31}\bar{\varphi}_3+(\lambda_4+\lambda_4^{-1})\bar{\varphi}_1 \end{pmatrix},$$

ондағы $\varphi_1 = l_3e^{\rho_2+i\varepsilon_2}$, $\varphi_2 = l_4e^{-\rho_2-i\varepsilon_2}$, бұл жердегі $l_3 = |l_3|e^{i\vartheta_3}$, $\bar{l}_3 = |l_3|e^{-i\vartheta_3}$, $l_4 = |l_4|e^{i\vartheta_4}$, $\bar{l}_4 = |l_4|e^{-i\vartheta_4}$, $\frac{|l_3|}{|l_4|} = e^{2\zeta}, \frac{|l_4|}{|l_3|} = e^{2\zeta}$ және $\vartheta_3, \vartheta_4, \zeta \in R$. Демек,

$$\Phi^{[1]} = \begin{pmatrix} \varphi_1^{[1]} & -\bar{\varphi}_2^{[1]} & -\bar{\varphi}_3^{[1]} \\ \varphi_2^{[1]} & \bar{\varphi}_1^{[1]} & 0 \\ \varphi_3^{[1]} & 0 & \bar{\varphi}_1^{[1]} \end{pmatrix}.$$

мұнда

$$\varphi_1^{[1]} = B|l_3|e^{i\vartheta_3+\rho_2+i\varepsilon_2}+b_{12}|l_4|e^{i\vartheta_4-\rho_2-i\varepsilon_2},$$

$$\varphi_2^{[1]} = B|l_4|e^{i\vartheta_4-\rho_2-i\varepsilon_2} - b_{12}^*|l_3|e^{i\vartheta_3+\rho_2+i\varepsilon_2},$$

$$h^{[1]} = |l_3||l_4|\Big(2\cosh 2(\zeta+\rho_2)(B^2+|b_{12}|^2) + B^2e^{-2(\zeta+\rho_2)} + |b_{12}|^2 e^{2(\zeta+\rho_2)} - B(b_{12}^*e^{i\gamma} - b_{12}e^{-i\gamma})\Big).$$

бұл жердегі $B = (\lambda_4 + \lambda_4^{-1})$, $\gamma = \vartheta_3 - \vartheta_4 + 2\varepsilon_2$, $\lambda_4 = \alpha_4 + i\beta_4$.

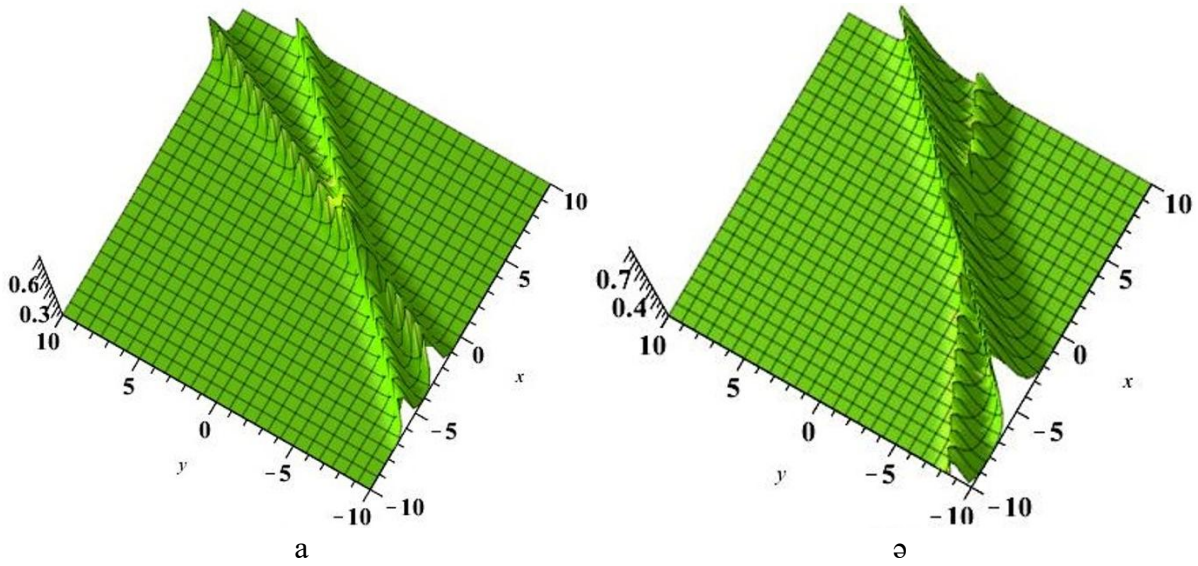
Ақырында, $q_1 = 0$ нөлдік бастапқы шешімен екі компонентті (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеуінің 2-солитонды шешімі мына түрде алады:

$$q_1^{[2]} = q_2^{[2]} = b_{12} + \frac{A\left(B^2e^{i\gamma} - b_{12}^2e^{-i\gamma} - 2Bb_{12}\sinh 2(\zeta+\rho_2)\right)}{2\cosh 2(\zeta+\rho_2)(B^2+|b_{12}|^2) + B^2e^{-2(\zeta+\rho_2)} + |b_{12}|^2 e^{2(\zeta+\rho_2)} - B(\bar{b}_{12}e^{i\gamma} - b_{12}e^{-i\gamma})}, \quad (168)$$

мұнда $A = -\dfrac{2i\beta_4}{\alpha_4^2+\beta_4^2}$ және

$$\rho_2 = 2\alpha_4\beta_4 x - \nu_3 y - \left(\nu_3 + \frac{\alpha_4\beta_4}{2(\alpha_4^2+\beta_4^2)^2}\right)t - \tau_3,$$

$$\varepsilon_2 = -(\alpha_4^2-\beta_4^2)x + \omega_3 y + \left(\omega_3 + 1 - \frac{(\alpha_4^2-\beta_4^2)}{4(\alpha_4^2+\beta_4^2)^2}\right)t + \kappa_3.$$



а ә

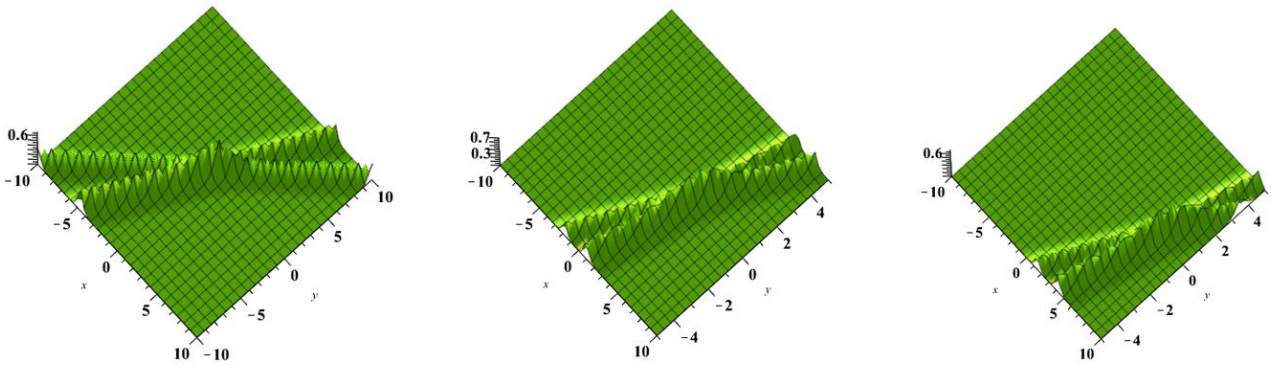
а – $\lambda = 1+i$; ә – $\lambda = 1+3i$

Сурет 23 – (168) шешіміне сәйкес $t = 2$ уақыттағы солитондардың таралуы, параметрлер: $M_1 = 1+i$, $\delta_1 = 1$

23-суретте λ-нің әр түрлі параметрлері үшін салынған графиктер көрсетілген. Көріп тұрағынымыздай, екі солитонды шешімнің таралу

сипаттамалары амплитуда, жылдамдық және локализация дәрежесі бойынша өзгешеленеді.

2-ретті ДТ-ін қолданып, $\alpha_4 = 1$, $\beta_4 = 1, \omega_2 = 1$, $\nu_3 = 2$, $\tau_3 = 2$ және $\kappa_3 = 2$ мәндерін орнатқанда, сәйкес $q_1^{[2]} = q_2^{[2]}$ 2-солитонды шешім алынады, бұл 26-суретте көрсетілген.



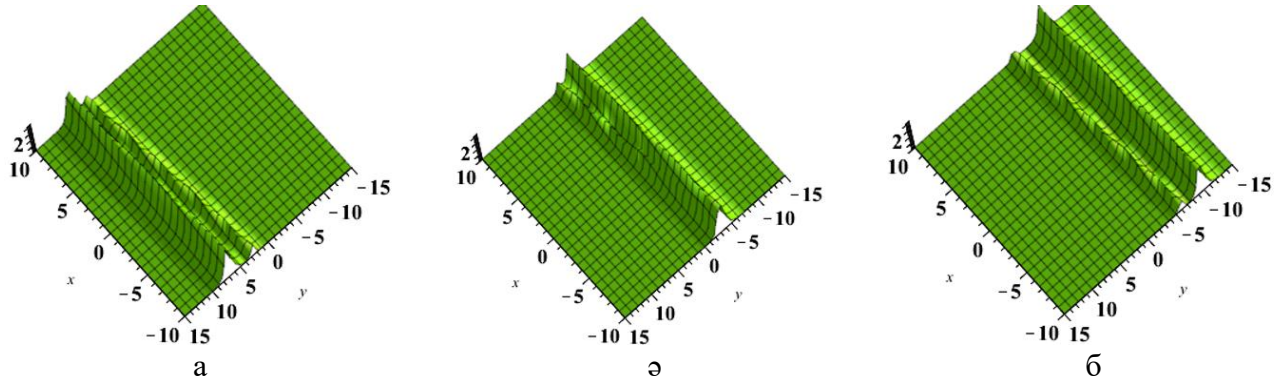
а ә б

а – $t = 0$; ә – $t = 3$; б – $t = 6$

Сурет 24 – $\left|q_1^{[2]}\right|^2 = \left|q_2^{[2]}\right|^2$ екі солитонды шешімнің уақыт бойынша эволюциясы әр түрлі уақыт сәттерінде

Ескерту – Параметрлер: $\alpha_4 = 1$, $\beta_4 = 1$, $\omega_3 = 1$, $\nu_3 = 2$, $\tau_3 = 2$ және $\kappa_3 = 2$, $x \in [-10,10]$ және $y \in [-5,5]$

24-суретте екі қиылысатын сызықтық солитонның серпімді соқтығысуы көрсетілген. Параметрлердің әр түрлі таңдауына қарамастан, 23-суретте сызықтық солитонның таралуының ортақ ерекшеліктері көрсетілген: кіші фазалық ығысулардан басқа, екі сызықтық солитонның пішіндері, амплитудалары, бағыттары және жылдамдықтары өзара әрекеттесу процесінде өзгеріссіз қалады.



а ә б

а – $t = -2$; ә – $t = 0.5$; б – $t = 2$

Сурет 25 – $\left|q_1^{[2]}\right|^2 = \left|q_2^{[2]}\right|^2$ екі солитонды шешімнің уақыт бойынша эволюциясы әр түрлі уақыт сәттерінде

Ескерту – Параметрлері $\alpha_4 = 0.4,\ \beta_4 = 0.4, \omega_3 = 2, \nu_3 = 2,\ \tau_3 = 2$ және $\kappa_3 = 2,$ $x \in [-10,10]$ және $y \in [-15,15]$

25-суретте екі параллель сызықтық солитонның серпімді өзара әрекеттесуі көрсетілген, мұнда екі солитонның да бір-біріне кедергі келтірмей таралатынын байқауға болады. Жалпы алғанда, жоғарыдағы 24, 25-суреттер сызықты солитондар арасындағы өзара әрекеттесу серпімді екенін көрсетеді.

2.3 (2+1)-өлшемді Фокас-Ленэллс теңдеуінің (2+1)-өлшемді спиндік жүйесі

Енді (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеуінің спиндік жүйесін құруға көшейік. Ол үшін алдымен осы қажетті жүйе үшін ЛК-сін табу мақсатында төмендегідей калибрлік түрлендіру әдісі қолданылады:

$$\Phi = g^{-1}\Psi, g = \Psi|_{\lambda=\lambda_0},$$

мұнда $g(x,t)$ – калибрлік түрлендіруді сипаттайтын унитарлы матрица.

Ф векторлық функцияның x және t аргументтері бойынша туындылары табылады

$$\Phi_x = (g^{-1}\Psi_x - g^{-1}g_x g^{-1})\Psi = U'\Phi = (U - U_0)\Phi, \quad (169)$$

$$\Phi_t = (g^{-1}\Psi_t - g^{-1}g_t g^{-1})\Psi = W'\Phi = (W - W_0)\Phi. \quad (170)$$

Бірлескен теңдеулер жүйесін қанағаттандыратын $g(x,t)$ унитарлы матрицаны таңдаймыз: $g_x = U_0 g,\ g_t = (W - W_0)g$ мұндағы $U_0(x,t)$ және $W_0(x,t)$ – (169) және (170) теңдеулер жүйесіндегі нөлдік қосықтық шартымен қанағаттанатын анти-Гермиттік матрицалар болып табылады.

$$U_0(x,t) = -i\lambda_0^2\sigma_3 + \lambda_0 Q, \quad W_0(x,t) = W_1 + \frac{1}{\lambda_0}W_{-1} - \frac{i}{4\lambda_0^2}\sigma_3,$$

мұнда λ_0 – тұрақты шама. Сондықтан (169) және (170) өрнектерін ескерсек, келесі алынады:

$$\Phi_x = \left(-i(\lambda^2 - \lambda_0^2)g^{-1}\sigma_3 g + (\lambda - \lambda_0)g^{-1}Qg\right)\Phi,$$

$$\Phi_t = \left(\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right)g^{-1}W_{-1}g - \frac{i}{4}\left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_0^2}\right)g^{-1}\sigma_3 g\right)\Phi.$$

Күрделі есептеулер мен түрлендірулерді жүргізген соң, қажетті спиндік жүйенің шешімдері мен (169) және (170) теңдеулер жүйесінің шешімдері арасындағы байланыс мына түрде көрінеді:

$$g^{-1}Qg = \frac{1}{2\lambda_0} AA_x, \quad g^{-1}W_{-1}g = \frac{\lambda_0}{2}(AA_t - AA_y).$$

Енді (169) және (170) теңдеулер жүйесін келесі түрде қайта жазуға болады:

$$\Phi_x = \left(-i(\lambda^2 - \lambda_0^2)A + \frac{\lambda - \lambda_0}{2\lambda_0} AA_x \right)\Phi, \tag{171}$$

$$\Phi_t = \left(\left(\frac{\lambda}{2\lambda_0} - \frac{1}{2} \right) AA_t - \left(\frac{\lambda}{2\lambda_0} - \frac{1}{2} \right) AA_y - \frac{i}{4}\left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_0^2} \right) A \right)\Phi. \tag{172}$$

Осылайша, жаңа ЛК алынды. (171) және (172) теңдеулерін айқас дифференциядау арқылы алынады

$$U_t^{'} - U_y^{'} - W_x^{'} + [U^{'}, W^{'}] = 0. \tag{173}$$

(173) теңдеуді шешіп, λ дәрежелері бойынша қарастырып, оны $1/\lambda_0$-ге көбейткенде алынады:

$$i\left(A_t - A_y + \frac{1}{4\lambda_0^4} A_x \right) + \frac{1}{4\lambda_0^2}[A, A_{xy} - A_{xt}] = 0. \tag{174}$$

Сонымен, (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеуінің (2+1)-өлшемді спиндік жүйесін (174) теңдеу таптық. Келесі бөлімшеде спиндік жүйенің екі компонентті нұсқасы алынады.

2.4 Екі компонентті Фокас-Ленэллс теңдеуінің екі компонентті спиндік жүйесі

Сызықты емес интегралданатын теңдеулердің шешімдері арасында белгілі бір эквиваленттік байланыс бар, бұл ФЛ теңдеуі мен оған сәйкес спиндік жүйенің калибрлік эквиваленттілігін көрсетеді [111-114]. Осы бөлімде екі компонентті ФЛ теңдеуінен екі компонентті спиндік жүйеге өтудің алгоритмін ұсынамыз. Мұны жүзеге асыру үшін меншікті функциялардың нақты түрін анықтау қажет, олар кезінде және шарттары арқылы (137) және (138) теңдеулерден шығады.

Сондықтан, екі компонентті ФЛ теңдеуін қарастырып, одан екі компонентті спиндік жүйеге өтуге болады. Бұл үшін меншікті функциялардың нақты түрін анықтау қажет, олар $\lambda = \lambda_0$ кезінде және $r = -\bar{q}$ шарттарына сай (137) және (138) теңдеулерден шығады.

$$\varphi_{1x} = -i\lambda_0^2\varphi_1 + \lambda_0 q_{1x}\varphi_2 + \lambda_0 q_{2x}\varphi_3,$$
$$\varphi_{2x} = -\lambda_0 \bar{q}_{1x}\varphi_1 + i\lambda_0^2\varphi_2,$$
$$\varphi_{3x} = -\lambda_0 \bar{q}_{2x}\varphi_1 + i\lambda_0^2\varphi_3,$$
$$\varphi_{1t} = -i\lambda_0^2\varphi_1 + \frac{i}{2}|q_1|^2\varphi_1 + \frac{i}{2}|q_2|^2\varphi_1 + i\varphi_1 - \frac{i}{4\lambda_0^2}\varphi_1 + \lambda_0 q_{1x}\varphi_2 + \frac{i}{2\lambda_0}q_1\varphi_2 + \lambda_0 q_{2x}\varphi_3 + \frac{i}{2\lambda_0}q_2\varphi_3,$$

$$\varphi_{2t} = -\lambda_0 \bar{q}_{1x}\varphi_1 + \frac{i}{2\lambda_0}\bar{q}_1\varphi_1 + i\lambda_0^2\varphi_2 - \frac{i|q_1|^2}{2}\varphi_2 - i\varphi_2 + \frac{i}{4\lambda_0^2}\varphi_2 - \frac{i}{2}\bar{q}_1 q_2\varphi_3,$$
$$\varphi_{3t} = -\lambda_0 \bar{q}_{2x}\varphi_1 + \frac{i}{2\lambda_0}\bar{q}_2\varphi_1 - \frac{iq_1\bar{q}_2}{2}\varphi_2 + i\lambda_0^2\varphi_3 - \frac{i|q_2|^2}{2}\varphi_3 - i\varphi_3 + \frac{i}{4\lambda_0^2}\varphi_3.$$

Енді спиннің $A = (A_1, A_2, A_3)$ және $B = (B_1, B_2, B_3)$ векторларын анықтайық, мұндағы $A^2 = B^2 = 1$. Ыңғайлы белгілеу енгізіледі

$$A = g^{-1}\sigma_3 g, \tag{175}$$
$$B = h^{-1}\sigma_3 h, \tag{176}$$

мұнда σ_3 - Паули матрицасы, ал g, h - келесідей анықталатын матрицалық функциялар:

$$g = \begin{pmatrix} \psi_1 & -\bar{\psi}_2 \\ \psi_2 & \bar{\psi}_1 \end{pmatrix}, \quad g^{-1} = \frac{1}{\Delta_1}\begin{pmatrix} \bar{\psi}_1 & \bar{\psi}_2 \\ -\psi_2 & \psi_1 \end{pmatrix}, \quad \Delta_1 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2,$$
$$h = \begin{pmatrix} \psi_1 & -\bar{\psi}_3 \\ \psi_3 & \bar{\psi}_1 \end{pmatrix}, \quad h^{-1} = \frac{1}{\Delta_2}\begin{pmatrix} \bar{\psi}_1 & \bar{\psi}_3 \\ -\psi_3 & \psi_1 \end{pmatrix}, \quad \Delta_2 = |\psi_1|^2 + |\psi_3|^2,$$

Осылайша, (175) және (176) теңдеулердің түрлері

$$A = \frac{1}{\Delta_1}\begin{pmatrix} |\psi_1|^2 - |\psi_2|^2 & -2\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 \\ -2\psi_1\psi_2 & |\psi_2|^2 - |\psi_1|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_3 & A^- \\ A^+ & -A_3 \end{pmatrix}, \tag{177}$$

$$B=\frac{1}{\Delta_2}\begin{pmatrix}|\psi_1|^2-|\psi_3|^2 & -2\bar{\psi}_1\bar{\psi}_3\\ -2\psi_1\psi_3 & |\psi_3|^2-|\psi_1|^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_3 & B^-\\ B^+ & -B_3\end{pmatrix}. \tag{178}$$

Ендігі қадам – екі компонентті спиндік жүйені анықтау үшін (177) теңдеудің әрбір элементін есептеу, сондай-ақ (178) теңдеудің екінші қабаты үшін де сәйкес элементтерді табу, яғни

$$A_x=2\lambda_0 g^{-1}\begin{pmatrix}0 & q_{1x}\\ \bar{q}_{1x} & 0\end{pmatrix}g+\frac{2\lambda_0}{\Delta_1}g^{-1}\begin{pmatrix}0 & q_{2x}\bar{\psi}_2\psi_3\\ \bar{q}_{2x}\psi_2\bar{\psi}_3 & 0\end{pmatrix}g,$$

$$B_x=2\lambda_0 h^{-1}\begin{pmatrix}0 & q_{2x}\\ \bar{q}_{2x} & 0\end{pmatrix}h+\frac{2\lambda_0}{\Delta_2}h^{-1}\begin{pmatrix}0 & q_{1x}\bar{\psi}_3\psi_2\\ \bar{q}_{1x}\psi_3\bar{\psi}_2 & 0\end{pmatrix}h,$$

$$A_t=A_x-\frac{i}{\lambda_0}g^{-1}\begin{pmatrix}0 & -q_1\\ \bar{q}_1 & 0\end{pmatrix}g+\frac{i}{\Delta_1}g^{-1}\begin{pmatrix}0 & |q_2|^2\psi_1\bar{\psi}_2-q_1\bar{q}_2\bar{\psi}_3\psi_1\\ \bar{q}_1 q_2\bar{\psi}_1\psi_3-|q_2|^2\bar{\psi}_1\psi_2 & 0\end{pmatrix}g+$$

$$+\frac{i}{\lambda_0\Delta_1}g^{-1}\begin{pmatrix}0 & q_2\bar{\psi}_2\psi_3\\ -\bar{q}_2\psi_2\bar{\psi}_3 & 0\end{pmatrix}g,$$

$$B_t=B_x+\frac{i}{\lambda_0}h^{-1}\begin{pmatrix}0 & q_2\\ -\bar{q}_2 & 0\end{pmatrix}h+\frac{i}{\Delta_2}h^{-1}\begin{pmatrix}0 & |q_1|^2\psi_1\bar{\psi}_3-\bar{q}_1 q_2\bar{\psi}_2\psi_1\\ q_1\bar{q}_2\bar{\psi}_1\psi_2-|q_1|^2\bar{\psi}_1\psi_3 & 0\end{pmatrix}h+$$

$$+\frac{i}{\lambda_0\Delta_2}h^{-1}\begin{pmatrix}0 & q_1\bar{\psi}_3\psi_2\\ -\bar{q}_1\psi_3\bar{\psi}_2 & 0\end{pmatrix}h.$$

Коммутаторларды да анықтап, оларды (47) теңдеуге қойып, бірқатар ықшамдаулар жүргізу арқылы екі компонентті түрі алынады

$$iA_t+\frac{1}{4\lambda_0^2}\left([A,A_{xx}]-[A,A_{xt}]\right)+i\frac{(1-4\lambda_0^4)}{4\lambda_0^4}A_x=\frac{i|q_2|^2}{4\lambda_0^2}A_x-\frac{i|q_2|^2|\psi_2|^2}{2\lambda_0^2\Delta_1}A_x+\frac{|q_2|^2}{4}[\sigma_3,A]-$$
$$-\frac{1}{\Delta_1}g^{-1}\begin{pmatrix}0 & -q_1\bar{q}_2\psi_1\bar{\psi}_3\\ \bar{q}_1 q_2\bar{\psi}_1\psi_3 & 0\end{pmatrix}g+\alpha g^{-1}\begin{pmatrix}0 & F_1\\ \bar{F}_1 & 0\end{pmatrix}g, \tag{179}$$

$$iB_t+\frac{1}{4\lambda_0^2}\left([B,B_{xx}]-[B,B_{xt}]\right)+i\frac{(1-4\lambda_0^4)}{4\lambda_0^4}B_x=\frac{i|q_1|^2}{4\lambda_0^2}B_x-\frac{i|q_1|^2|\psi_3|^2}{2\lambda_0^2\Delta_2}B_x+\frac{|q_1|^2}{4}[\sigma_3,B]-$$
$$-\frac{1}{\Delta_2}h^{-1}\begin{pmatrix}0 & -\bar{q}_1 q_2\psi_1\bar{\psi}_2\\ q_1\bar{q}_2\bar{\psi}_1\psi_2 & 0\end{pmatrix}h+\beta h^{-1}\begin{pmatrix}0 & F_2\\ \bar{F}_2 & 0\end{pmatrix}h, \tag{180}$$

мұнда

$$\alpha = \frac{i}{2\lambda_0\Delta_1},\ \ \beta = \frac{i}{2\lambda_0\Delta_2},$$

$$F_1 = \frac{(k_1 + \bar{k}_1)}{\lambda_0} q_{1x} + \frac{l}{\lambda_0} q_{2x} + q_1\bar{q}_2 q_{1x}\psi_2\bar{\psi}_3 + \frac{2}{\lambda_0\Delta_1} q_2 q_{2x}\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2\psi_3^2 + \frac{n}{\Delta_1} q_1\bar{q}_2 q_{2x},$$

$$\bar{F}_1 = \frac{(k_1 + \bar{k}_1)}{\lambda_0} \bar{q}_{1x} + \frac{\bar{l}}{\lambda_0} \bar{q}_{2x} + q_2\bar{q}_1 \bar{q}_{1x}\bar{\psi}_2\psi_3 + \frac{2}{\lambda_0\Delta_1} \bar{q}_2 \bar{q}_{2x}\psi_1\psi_2(\bar{\psi}_3)^2 + \frac{n}{\Delta_1} \bar{q}_1 q_2\bar{q}_{2x},$$

$$F_2 = \frac{(k_2 + \bar{k}_2)}{\lambda_0} q_{2x} - \frac{\bar{l}}{\lambda_0} q_{1x} + \bar{q}_1 q_2 q_{2x}\bar{\psi}_2\psi_3 + \frac{2}{\lambda_0\Delta_2} q_1 q_{1x}\bar{\psi}_1\bar{\psi}_3\psi_2^2 + \frac{n}{\Delta_2} \bar{q}_1 q_2 q_{1x},$$

$$\bar{F}_2 = \frac{(k_2 + \bar{k}_2)}{\lambda_0} \bar{q}_{2x} - \frac{l}{\lambda_0} \bar{q}_{1x} + q_1\bar{q}_2 \bar{q}_{2x}\psi_2\bar{\psi}_3 + \frac{2}{\lambda_0\Delta_2} \bar{q}_1 \bar{q}_{1x}\psi_1\psi_3(\bar{\psi}_2)^2 + \frac{n}{\Delta_2} q_1\bar{q}_2 \bar{q}_{1x}.$$

бұл жердегі

$$k_1 = q_2\bar{\psi}_1\psi_3,\quad \bar{k}_1 = \bar{q}_2\psi_1\bar{\psi}_3,\quad k_2 = q_1\bar{\psi}_1\psi_2,\quad \bar{k}_2 = \bar{q}_1\psi_1\bar{\psi}_2,$$
$$l = q_1\bar{\psi}_1\psi_3 - \bar{q}_2\psi_1\bar{\psi}_2,\quad \bar{l} = \bar{q}_1\bar{\psi}_3\psi_1 - q_2\psi_2\bar{\psi}_1,\quad n = 2|\psi_2|^2|\psi_3|^2 - \Delta_1\Delta_2.$$

Сонымен, (179) және (180) теңдеулерден ізделінді теңдеу табылды [111, с. 4-13].

2.5 Сақталу заңы

Интегралданатын сызықты емес теңдеулердің ең маңызды сипаттамаларының бірі - олардың сақталу заңдары және сәйкес бірінші интегралдары. Математикалық тұрғыдан алғанда, сақталу заңдары қозғалыстың инварианттарының болуын қамтамасыз етеді және интегралданатын теңдеулердің иерархияларын құруға мүмкіндік береді. Физикалық мағынада сәйкес интегралдық шамалар жүйенің сақталған сипаттамалары, мысалы, қарқындылық, энергия және импульс ретінде түсіндіріледі.

Оларды көбейткіш әдісі, вариациялық тәсіл және Лакс жұп әдісі сияқты әр түрлі әдістермен алуға болады. Атап айтқанда, бұл типтегі ең қарапайым қатынастар бастапқы теңдеуді және оның түйіндесіне көбейтуге, содан кейін дивергенция түріне дейін азайтуға негізделген тікелей есептеулер арқылы алынады. Бұл тәсіл сақталған шаманың тығыздығын және сәйкес ағындарды нақты анықтауға мүмкіндік береді.

Лакс жұбының болуы, өз кезегінде, сақталу заңдарының шексіз иерархиясының болуын қамтамасыз етеді, бұл толығымен интегралданатын жүйелердің тән белгісі болып табылады және солитон шешімдерінің динамикасын зерттеуде маңызды рөл атқарады. Осылайша, бұл бөлімшеде (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеуі үшін сақталу заңы тікелей есептеулер арқылы

алынады, бұл сәйкес бірінші интегралды табуға және теңдеудің математикалық құрылымын да, оның шешімдерінің физикалық табиғатын да тереңірек түсінуге мүмкіндік береді.

Бірінші сақталу заңы

(76) теңдеудің түйіндесінің түрі

$$-iq_{xt}^{*}+iq_{xy}^{*}+2q_{x}^{*}-q_{x}^{*}\,|\,q\,|^{2}-iq^{*}=0.$$

Бірінші сақталу заңын алу үшін (76) теңдеуді q_x^*, ал түйіндесін q_x көбейтіп, бір-бірнен азайтып, табатынымыз

$$iq_{xt}q_{x}^{*}+iq_{xt}^{*}q_{x}-iq_{xy}q_{x}^{*}-iq_{xy}^{*}q_{x}+iqq_{x}^{*}+iq^{*}q_{x}=0.$$

Енді әрбір мүшені көбейтінді туынды ережесіне сәйкес жазылады

$$q_{xt}q_{x}^{*}+q_{xt}^{*}q_{x}=\partial_{t}(q_{x}q_{x}^{*})=\partial_{t}\,|\,q_{x}\,|^{2},$$
$$q_{xy}q_{x}^{*}+q_{xy}^{*}q_{x}=\partial_{y}(q_{x}q_{x}^{*})=\partial_{y}\,|\,q_{x}\,|^{2},$$
$$qq_{x}^{*}+q^{*}q_{x}=\partial_{x}(qq^{*})=\partial_{x}\,|\,q\,|^{2}.$$

Нәтижесінде алатынымыз

$$\partial_{t}\,|\,q_{x}\,|^{2}-\partial_{y}\,|\,q_{x}\,|^{2}+\partial_{x}\,|\,q\,|^{2}=0.$$

Демек, (76) теңдеу үшін бірінші сақталу заңы дивергентті түрде жазылады

$$\partial_{t}T_{1}+\partial_{x}X_{1}+\partial_{y}K_{1}=0,$$

мұндағы

$$T_{1}=|\,q_{x}\,|^{2},\qquad X_{1}=|\,q\,|^{2},\qquad K_{1}=-|\,q_{x}\,|^{2},$$

бұл жердегі T_1 – толқын өрісінің градиенттік қарқындылығын сипаттайтын сақталған шаманың тығыздығы, X_1 – x кеңістіктік координата бойымен ағын, ал K_1 – y координата бойынша ағын.

Мұндай дивергенттік формадағы теңдеу T_1 тығыздығының уақыт бойынша өзгерісі кеңістіктегі сәйкес X_1 және K_1 ағындарымен өтелетінін білдіреді, бұл қарастырылып отырған физикалық шаманың сақталу заңын көрсетеді. Физикалық тұрғыдан алғанда, бұл толқын өрісінің эволюциясы кезінде тек амплитуда ғана емес, сонымен қатар импульс фазасы мен құрылымындағы

жергілікті өзгерістермен байланысты оның кеңістіктік біртекті еместігінің таралуы да сақталады дегенді білдіреді.

Бұл қасиет сызықты емес толқындардың, әсіресе солитондардың таралуын сипаттауда маңызды рөл атқарады, себебі ол ортадағы толқындық пакеттердің локализациясын, пішінін және тұрақтылығын анықтайды.

Бөлім бойынша қорытынды

Бұл бөлімде (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеуі және оның екі компонентті нұсқасы ұсынылып, олардың нақты бір және екі солитонды шешімдері ДТ арқылы осы жұмыста алғаш рет алынды. Сондай-ақ, (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеуінің бисызықты формасы құрастырылып, Хирота әдісі арқылы шешімдері анықталды. Бұл тәсілдер теңдеудің құрылымдық қасиеттерін сақтай отырып, солитондық шешімдерді жүйелі түрде құруға мүмкіндік береді. Сонымен қатар, (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеуінің спиндік жүйесі, сақталу заңы және екі компонентті ФЛ теңдеуінің спиндік жүйесі де осы жұмыста алғаш рет алынды, бұл олардың динамикалық қасиеттерін тереңірек түсінуге жол ашады.

3 ДИСПЕРСИЯСЫЗ ТЕҢДЕУЛЕР МЕН ОЛАРДЫҢ ГЕОМЕТРИЯСЫ

Бұл бөліме дифференциалдық геометриядағы солитондар теориясының қолданылуы зерттеледі. Жақында ұсынылған ФЛ солитондық теңдеуі қарастырылып, оның үш өлшемді евклид кеңістігіндегі екі өлшемді солитондық беті ($\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$) тұрғызылды. Осылайша ФЛ теңдеуі мен сәйкес бет арасындағы байланыс Сим-Тафель формуласы (СТФ) арқылы орнатылды. Сонымен қатар беттің бірінші және екінші квадраттық формалалары, оның ауданы және Гаусс қисықтығы анықталады. Алынған нәтижелер математикалық физикада, қисықтар геометриясында және беттер теориясында кең қолданыс табады.

3.1 Фокас-Ленэллс теңдеуімен индукцияланған солитонды бет

Геометриялық қасиеттерді [115-118], интегралдану мүмкіндігін [119-122] және сызықты емес теңдеулердің нақты шешімдерін [123-125] зерттеу физикадағы қолданбалар үшін маңызды рөл атқарады. Үш өлшемді Евклид кеңістігіндегі беттер теориясы ғылымның түрлі салаларында, әсіресе математика мен теориялық физикада кеңінен қолданылады. Осы бөлімшеде бұл

теорияны интегралданатын жүйелерді зерттеуге қолданамыз. Осы мақсатта аса қысқа сызықты емес жарық импульстерінің оптикалық талшықтардағы таралуын сипаттайтын интегралданатын (1+1)-өлшемді ФЛ теңдеуінің солитон беттерін зерттейміз.

3.1.1 Беттің фундаменталды формалары

Беттің бірінші фундаменталды формасы. Бірінші фундаменталды форма (1ФФ) беттер теориясында маңызды рөл атқарады және ең алдымен беттегі шексіз кішкентай доғаларды өлшеуге қызмет етеді. P тегіс беттің 1ФФ деп $dr = r_x dx + r_t dt$ радиус-вектордың скалярлық квадратыны атайды:

$$I = dr^2 = (r_x dx + r_t dt)^2 = r_x^2 dx^2 + 2r_x r_t dx dt + r_t^2 dt^2, \qquad (181)$$

(181) теңдеу P беттің әрбір нүктесіндегі dx және dt дифференциалдарының квадраттық формасын көрсетеді.

1ФФ коэффициенттері үшін келесі белгілер жиі қолданылады:

$$E = r_x^2, \quad F = r_x r_t, \quad G = r_t^2, \qquad (182)$$

онда (182) теңдеуді (181) теңдеуге қойсақ ол келесі түрде қайта жазылады

$$I = Edx^2 + 2Fdxdt + Gdt^2, \qquad (183)$$

(183) теңдеудегі $EG - F^2 > 0$.

Екі өлшемді беттер мен интегралданатын теңдеулер ЛК арқылы байланысқан. Бұл СТФ арқылы жүзеге асады, ол келесі түрде беріледі [126, 127]:

$$r = \Phi^{-1}\Phi_\lambda. \qquad (184)$$

x және t координаталарымен параметрленген беттер λ анықтай отырып, 1ФФ анықтай аламыз. Айқын түрде көрініп тұрғандай, (184) теңдеуінен беттер матрицалардан тұратын сызықтық кеңістікке орналастырылған [128].

СТФ қолдану өте ыңғайлы, себебі r бойынша туындыларды есептеудің өте қарапайым ережесі бар. Шындығында,

$$r_x = (\Phi^{-1})_x \Phi_\lambda + \Phi^{-1}\Phi_{\lambda x} = -\Phi^{-1}\Phi_x \Phi^{-1}\Phi_\lambda + \Phi^{-1}(U\Phi)_\lambda = \\ = -\Phi^{-1}U\Phi_\lambda + \Phi^{-1}U_\lambda \Phi + \Phi^{-1}U\Phi_\lambda = \Phi^{-1}U_\lambda \Phi, \qquad (185)$$

$$r_t = \Phi^{-1}V_\lambda \Phi. \qquad (186)$$

Скалярлық көбейту стандартты болып табылады, яғни ол матрицаның ізіне (trace) пропорционалды. Мысалы: $r_x \cdot r_t = c\mathrm{tr}(U_\lambda V_\lambda)$, мұндағы c – тұрақты. Сол кезде (181) теңдеу матрицалық операторлар тұрғысынан келесі түрде жазылады:

$$I = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}(U_\lambda^2)dx^2 + 2\mathrm{tr}(U_\lambda V_\lambda)dxdt + \mathrm{tr}(V_\lambda^2)dt^2\right). \qquad (187)$$

Осылайша, (184) теңдеу, яғни СТФ солитон теңдеуі мен бетті байланыстырушы көпір қызметін атқаратыны айқын болды.

Енді матрицалық операторлар U және V-ні λ спектрлік параметр бойынша туындылап, олардың квадраты алынып, ізі (trace) табылады, яғни:

$$\mathrm{tr}(U_\lambda^2) = 2(|q_x|^2 - 4\lambda^2), \qquad (188)$$

$$\mathrm{tr}(U_\lambda V_\lambda) = 2\left(|q_x|^2 - 4\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2}\right) + \frac{i}{2\lambda^2}(\bar{q}q_x - q\bar{q}_x), \qquad (189)$$

$$\mathrm{tr}(V_\lambda^2) = 2\left(|q_x|^2 - 4\lambda^2 + \frac{i}{2\lambda^2}(\bar{q}q_x - q\bar{q}_x) + \frac{2}{\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^4}|q|^2 - \frac{1}{4\lambda^6}\right). \qquad (190)$$

(188)-(190) теңдеулерін (187) теңдеуіне қойғанда шығады

$$I = (|q_x|^2 - 4\lambda^2)dx^2 + \left(2(|q_x|^2 - 4\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2}) + \frac{i}{2\lambda^2}(\bar{q}q_x - q\bar{q}_x)\right)dxdt +$$
$$+\left(|q_x|^2 - 4\lambda^2 + \frac{i}{2\lambda^2}(\bar{q}q_x - q\bar{q}_x) + \frac{2}{\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^4}|q|^2 - \frac{1}{4\lambda^6}\right)dt^2$$

және (181) теңдеудің коэффициенттері

$$E = |q_x|^2 - 4\lambda^2, \qquad (191)$$

$$F = E + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{i}{4\lambda^2}(\bar{q}q_x - q\bar{q}_x), \qquad (192)$$

$$G = E + \frac{i}{2\lambda^2}(\bar{q}q_x - q\bar{q}_x) + \frac{2}{\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^4}|q|^2 - \frac{1}{4\lambda^6}. \qquad (193)$$

Осылайша, ФЛ теңдеуінің беттің 1ФФ табылды.

Беттің екінші фундаменталды формасы. Екінші фундаменталды форма (2ФФ) екінші жуықтаудағы бетті сипаттайды. Ол беттің жанама жазықтықтан

қалай ауытқығанын көрсетеді және беттің қисаюын толығымен анықтайды. 2ФФ регулярлы бет f үшін d^2r және n векторларының скалярлық көбейтіндісі көбейтіндісі деп аталады:

$$II = (d^2 r n)^2, \tag{194}$$

мұнда бірлік нормал вектор келесідей анықталады $n = \dfrac{r_x \wedge r_t}{|r_x \wedge r_t|} = \dfrac{r_x \wedge r_t}{\sqrt{EG - F^2}}$ және $r(x,t)$ векторлық функцияның екінші дифференциалы $d^2 r = r_{xx}dx^2 + 2r_{xt}dxdt + r_{tt}dt^2.$ Сонда (194) теңдеудің түрі

$$II = (r_{xx} \cdot n)dx^2 + 2(r_{xt} \cdot n)dxdt + (r_{tt} \cdot n)dt^2. \tag{195}$$

2ФФ коэффициенттері үшін келесі белгілер қолданылады:

$$L = r_{xx} \cdot n, \quad M = r_{xt} \cdot n, \quad N = r_{tt} \cdot n.$$

Бұл (195) теңдеуін келесі түрде қайта жазуға мүмкіндік береді

$$II = Ldx^2 + 2Mdxdt + Ndt^2, \tag{196}$$

мұнда L, M және N коэффициенттер

$$L = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(r_{xx}n), \quad M = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(r_{xt}n), \quad N = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(r_{tt}n). \tag{197}$$

бұл жердегі

$$n = \pm \frac{\Phi^{-1}[U_\lambda, V_\lambda]\Phi}{\sqrt{\frac{1}{2}\mathrm{tr}([U_\lambda, V_\lambda]^2)}},$$

(185) және (186) теңдеулердің екінші туындыларын оңай есептеуге болады

$$r_{xx} = (\Phi^{-1}U_\lambda\Phi)_x = -\Phi^{-1}\Phi_x\Phi^{-1}U_\lambda\Phi + \Phi^{-1}U_{\lambda x}\Phi + \Phi^{-1}U_\lambda\Phi_x = -\Phi^{-1}UU_\lambda\Phi +$$
$$+\Phi^{-1}U_{\lambda x}\Phi + \Phi^{-1}U_\lambda U\Phi = \Phi^{-1}(-UU_\lambda + U_{\lambda x} + U_\lambda U)\Phi = \Phi^{-1}(U_{\lambda x} + [U_\lambda, U])\Phi, \tag{198}$$

$$r_{xt} = \Phi^{-1}(U_{\lambda t} + [U_\lambda, V])\Phi, \tag{199}$$

$$r_{tt} = \Phi^{-1}(V_{\lambda t} + [V_\lambda, V])\Phi. \tag{200}$$

(198)-(200) теңдеулерді (197) теңдеуіне қойып ізделінді 2ФФ коэффициенттерін есептеудің соңғы формуланы тапқан соң, олардың коммутаторлары есептелініп, алынады

$$L=\frac{\frac{i}{2\lambda^2}(\bar{q}_x q_{xx}-q_x\bar{q}_{xx})+2|q_x|^2-\bar{q}q_{xx}-q\bar{q}_{xx}+2i\lambda^2(\bar{q}q_x-q\bar{q}_x)}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^4}|q_x|^2+\frac{2i}{\lambda^2}(\bar{q}q_x-q\bar{q}_x)-\frac{1}{4\lambda^2}((|q|^2)_x)^2+4|q|^2}}, \qquad (201)$$

$$M=\frac{\frac{i}{2\lambda^2}(\bar{q}_x q_{xt}-q_x\bar{q}_{xt})+\frac{\alpha}{\lambda^2}|q_x|^2-ia(q\bar{q}_x-\bar{q}q_x)+\frac{1}{4\lambda^2}((|q|^2)_x)^2-\bar{q}q_{xt}-q\bar{q}_{xt}-4|q|^2}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^4}|q_x|^2+\frac{2i}{\lambda^2}(\bar{q}q_x-q\bar{q}_x)-\frac{1}{4\lambda^2}((|q|^2)_x)^2+4|q|^2}}, \qquad (202)$$

$$N=\frac{M+\frac{1}{4\lambda^4}(q_t\bar{q}_x+\bar{q}_t q_x)-\frac{1}{\lambda^4}|q_x|^2+\frac{i\beta}{2\lambda^2}(q\bar{q}_x-\bar{q}q_x)+\frac{1}{4\lambda^2}((|q|^2)_x)^2+\frac{i}{2\lambda^2}(\bar{q}q_t-q\bar{q}_t)-2(\beta-2)|q|^2}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^4}|q_x|^2+\frac{2i}{\lambda^2}(\bar{q}q_x-q\bar{q}_x)-\frac{1}{4\lambda^2}((|q|^2)_x)^2+4|q|^2}}, \qquad (203)$$

бұл жердегі $a=\alpha-1/\lambda^2$.

Осылайша, (196) теңдеуімен анықталатын беттің 2ФФ таптық, ондағы коэффициенттер (201)-(203) теңдеулеріне тең.

3.1.2 Беттің ауданы және Гаусс қисықтығы

Беттің ауданы. Егер евклидтік кеңістіктегі бет $r(x,t)$ тегіс параметрлік функциямен берілсе, онда x,t параметрлер x,t жазықтығындағы D облысында өзгеретін болса, онда беттің S ауданы қос интеграл арқылы өрнектеледі:

$$S=\iint_D |r_x\wedge r_t|\,dxdt,$$

мұнда модуль векторларының векторлық көбейтіндісі r_x және r_t тең

$$|r_x\wedge r_t|=\frac{1}{2}\mathrm{tr}(r_{xx}).$$

Белгілі болғандай, r_{xx} (219) формуласы бойынша есептеледі, онда S бет ауданы келесі формула бойынша анықталады:

$$S=\iint_D\sqrt{\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(U_{\lambda x}+[U_\lambda,U]\right)^2}\,dxdt,$$

онда біздің талап етілетін беттің ауданы S ретінде көрінеді

$$S = \iint_D \sqrt{|q_{xx}|^2 + 2i\lambda^2(\bar{q}_x q_{xx} - q_x \bar{q}_{xx}) + 4\lambda^4 |q_x|^2}\, dxdt.$$

Беттің Гаусс қисықтығы. Беттің Гаусс қисықтығы – берілген нүктедегі регулярлы беттің бас қисықтықтарының көбейтіндісі болып табылады бірінші және екінші негізгі формалардың дискриминанттарының қатынасы арқылы есептеледі [127, p. 012042]

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \tag{204}$$

яғни (204) теңдеуіне (191)-(193) және (201)-(203) теңдеулерін қойып, Гаусс қисықтығын алуға болады.

Осылайша, бұл жұмыста ФЛ солитондық теңдеуі үшін СТФ-ның көмегімен беттің 1ФФ және 2ФФ тиісті коэффициенттерімен бірге табылды. 2ФФ регулярлы беттің геометриялық қасиеттерін зерттеудің тиімді құралы болып табылады. Бұл форма арқылы беттің жанама жазықтықтан қаншалықты және қандай түрде ауытқитынын сипаттайтын маңызды геометриялық шамаларды анықтауға болады. Осы формалардың көмегімен беттің Гаусс қисықтығын есептеу формуласы алынды; ол регулярлы беттің нүктелерін классификациялауда қолайлы: оның таңбасы берілген нүктедегі беттің мінезін көрсетеді ($K > 0$ эллиптикалық, $K < 0$ гиперболалық, $K = 0$ параболалық). Сондай-ақ, беттің ауданы да анықталды.

3.2 Теңдеулердің дисперсиясыз шектері

Сызықты емес дисперсиясыз теңдеулер интегралданатын иерархиялардың дисперсиясыз (квазиклассикалық) шегі ретінде немесе гидродинамикалық типті жүйе құру арқылы алынады. Бұл бөлімде (1+1) өлшемді ФЛ теңдеуінің және оның спиндік жүйесінің дисперсиясыз шектері алынған, сондай-ақ осы шектерге сәйкес келетін ЛЖ-тары табылады.

Белгілі болғандай, ФЛ теңдеуі оптикалық талшықтардағы ультрақысқа сызықты емес жарық импульстерінің таралу динамикасын сипаттайды. Дисперсияның әсері азайған немесе толығымен еленбейтін шектік режимдерде жүйенің эволюциясы айтарлықтай қарапайымдалып, толқындық өрістің айтарлықтай жылдам өзгеретін аймақтарында «соққы» типті құрылымдардың пайда болуына әкеледі. Сондықтан ФЛ теңдеуінің дисперсиясыз нұсқасының дәл шешімдерін алу – оптикалық талшықтардағы сызықты емес соққы толқындарының қасиеттерін түсінуде аса маңызды.

Осы бөлімшеде алынған ФЛ теңдеуінің дисперсиясыз шегі оның спиндік жүйесінің де дисперсиясыз түрін анықтауға мүмкіндік береді. Спин айнымалыларымен өрнектелген эквивалентті жүйе дисперсиясыз шекке өткенде гидродинамикалық типті компакт жүйеге айналады, ол бастапқы

сызықты емес толқындық үлгілердің физикалық табиғатын тереңірек түсіндіреді. Бұл шек спин өрістерінің баяу модуляцияланатын динамикасын сипаттайды және интегралданатын құрылымды толық сақтайды.

Алынған нәтижелерді пайдалана отырып, дисперсиясыз теңдеу мен оның спиндік жүйесі үшін әр түрлі физикалық қолдануларға ие «соққы» толқындық шешімдерді немесе өздігінен фокусаланатын аймақтарда пайда болатын градиенттік апатты сипаттайтын шешімдерді табуға болады. Мұндай шешімдер оптикалық талшықтарда, плазмалық ортада, Бозе-Эйнштейн конденсаттарында және гидродинамикалық жүйелерде пайда болатын дисперсиясыз режимдерді модельдеу үшін маңызды.

3.2.1 Фокас-Ленэллс теңдеуінің дисперсиясыз шектері

Дисперсиясыз теңдеулер алғаш рет 1980 жылы Лебедев, Манин және Захаров тарапынан бір-бірінен тәуелсіз енгізілген. Бұл теңдеулердің пайда болуы төмен өлшемді кванттық өріс теориясының дамуымен тығыз байланысты. Дисперсиясыз жүйелердің маңызды мысалдарының бірі – дисперсиясыз Кадомцев-Петвиашвили теңдеуі, ол дисперсияның әсері ескерілмейтін режимдерде толқынның таралуын сипаттайды.

Осы бөлімшеде (1+1)-өлшемді дисперсиясыз ФЛ теңдеуін және оған сәйкес ЛК ұсынамыз. ЛЖ-ның сәйкестік шартының орындалуы бұл теңдеудің толық интегралданатын модель екенін дәлелдейді.

Жалпы алғанда, сызықты емес дисперсиясыз теңдеулер интегралданатын иерархиялардың квазиклассикалық (дисперсиясыз) шегін алу немесе гидродинамикалық типтегі жүйелерді құру арқылы шығарылады [129, 130]. Осы бөлімде (2+1)-өлшемді дисперсиясыз ФЛ теңдеуін дәл осы бірінші тәсіл арқылы аламыз. Мұндай кеңейтілген форма [131] еңбегіндегі (1+1)-өлшемді ФЛ теңдеуін жоғары өлшемге жалпылау нәтижесінде алынады. ФЛ теңдеуі – сызықтық емес Шредингер теңдеуінің елеулі жалпылауы әрі интегралданатын солитондық жүйелердің белгілі бір классына жатады.

Солитондық модельдердің ерекшелігі – олардың локализацияланған толқындық конфигурациялары өзара әсерлескеннен кейін бастапқы пішінін, амплитудасын және қозғалыс жылдамдығын сақтап қалуы. ФЛ теңдеуінің де солитондық табиғаты осы қасиетке негізделеді. Жүйеде дисперсиялық әсерлер болса да, сызықтық емес өзара әрекеттің басымдығы толқын құрылымдарының тұрақтылығын қамтамасыз етеді.

Бұл құбылысты айқынырақ көрсету мақсатында 16-суретте $t = 0$ бастапқы толқын профилінің уақыт бойынша өзгеруі бейнеленген. Толқынның дамуында дисперсия мен сызықтық емес әсерлердің бәсекелестігі маңызды рөл атқарады. Егер теңдеуден дисперсиялық мүшені алып тастасақ, онда таза сызықты емес модель пайда болады; мұндай модельдер көбіне градиенттің тез өсуіне немесе «соққы» типті толқындық құрылымдардың қалыптасуына әкеледі. Сондықтан дисперсиясыз шектегі шешімдер жүйенің нақты физикалық әрекетін сипаттауда ерекше мәнге ие.

Дисперсиясыз (1+1)-өлшемді Фокас-Ленэллс теңдеуі

(1+1)-өлшемді ФЛ теңдеуінің дисперсиясыз шегін (квазиклассикалық шегі) табу көшейік. Ол үшін оған x және t арқылы масштабты түрлендіруді жасаймыз, яғни $\frac{\partial}{\partial t} \to \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial x} \to \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}$ және $\varepsilon \to 0$ шекті ауысу болып табылады [132]. Мұнда ε масштабталған Планк тұрақтысы. Бұл жағдайда (1+1)-өлшемді ФЛ теңдеуі келесі түрге келеді:

$$i\varepsilon^2 q_{xt} - i\varepsilon^2 q_{xx} + 2\varepsilon q_x - \varepsilon |q|^2 q_x + iq = 0. \tag{205}$$

Айнымалыларды өзгерту жасалынады

$$q = \sqrt{u} e^{\frac{iS}{\varepsilon}}, \tag{206}$$

мұнда $u(x,t)$ амплитуда және $S(x,t)$ классикалық әрекет, олар нақты функциялар, сондай-ақ, $|q|^2 = u$.

Енді алдымен (206) теңдеуді (205) теңдеудің мүшелеріне сәйкес дифференциалдарын анықтап, $S = \partial_x^{-1} v$ $(v = S_x)$ алмастыруы қолданылады

$$v_t - v_x + u_x + \frac{v_x}{v^2} = 0, \tag{207}$$

$$u_t + (2v_t u + \gamma u_x - 2(uv)_x - 2u_x + uu_x)v^{-1} = 0, \tag{208}$$

бұл жердегі $\gamma = \partial_x^{-1} v_t$.

(207) және (208) теңдеулер ізделінді дисперсиясыз (1+1) өлшемді ФЛ теңдеуі болып табылады және оларда дисперсия мүшелері жоқ екені анық.

Дисперсиясыз (1+1)-өлшемді ФЛ теңдеуінің Лакс көрінісі

(207) және (208) теңдеулердің ЛК құру үшін ФЛ теңдеуінің ЛК құрауыштарын (17)-(20) теңдеулерін қарастырып, айнымалыларды ауыстыру келесі формада орнатылады:

$$\Phi_1 = \xi_1 e^{\frac{i}{\varepsilon}\left[F + \lambda^2 x\right]}, \quad \Phi_2 = \xi_2 e^{\frac{i}{\varepsilon}\left[F + \lambda^2 x - \partial_x^{-1} v\right]}. \tag{209}$$

(209) теңдеудегі F, u, v, ξ_n – нақты функциялар.

$$F_x - \frac{\lambda^2 u v^2}{F_x - v} + 2\lambda^2 = 0 \tag{210}$$

немесе (210) теңдеу $p = F_x$ кезінде

$$p+\frac{\lambda^2 uv^2}{p-v}+2\lambda^2=0. \qquad (211)$$

(211) теңдеуден бірқатар ықшамдаулардан кейін алынады:

$$p+\frac{\lambda^2 uv^2}{p-v}+2\lambda^2=0, \qquad p_t-p_x+\frac{1}{2}\left(\frac{uv}{p-v}\right)_x+\frac{u_x}{2}=0.$$

Осылайша, дисперсиясыз (1+1)-өлшемді ФЛ теңдеуі табылып, оның үйлесімділік шартын қанағаттандыратын ЛК құрылды. Осы нәтиже бойынша теңдеудің «соққы» толқынының шешімін табуға болады.

(2+1)-өлшемді Фокас-Ленэллс теңдеуінің дисперсиясыз шегі

Енді (79) теңдеудің дисперсиясыз шегін табуға көшейік. Осы мақсатта масштабты түрлендіру жүргіземіз, атап айтқанда $\frac{\partial}{\partial x}\to\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\to\varepsilon\frac{\partial}{\partial y}$ және $\varepsilon\to 0$ шегі қабылданылады [133]:

Осы жағдайда (76) теңдеу келесі түрде жазылады:

$$i\varepsilon^2 q_{xt}-i\varepsilon^2 q_{xy}+2\varepsilon q_x-\varepsilon q_x|q|^2+iq=0. \qquad (212)$$

Келесі түрде алмасу енгізіледі:

$$q=\sqrt{u}\exp\left[\frac{iS}{\varepsilon}\right], \qquad (213)$$

мұнда $u(x,y,t)$ - амплитуда және $S(x,y,t)$ - нақты функция болып табылатын классикалық әсер. Сонымен бірге, $|q|^2=u$.

Содан кейін (213) теңдеуді (212) теңдеуге қойып, ε дәрежелері бойынша қарастырып, $S_x=v$ алмастыруын қолданып, келесідей қайта жазуға болады:

$$v_t-v_y+u_x+\frac{v_x}{v^2}=0, \qquad (214)$$

$$u_t+\left(2v_t u+\gamma u_x-2(uv)_y-2u_x+uu_x-u_x\kappa+u_y v\right)v^{-1}=0, \qquad (215)$$

бұл жердегі $\gamma=\partial_x^{-1}v_t$ және $\kappa=\partial_x^{-1}v_y$.

Сонымен, (214) және (215) теңдеулері – ізделінді (2+1)-өлшемді дисперсиясыз ФЛ теңдеуіміз болып табылады. Келесі бөлімшеде табылған

дисперсиясыз ФЛ теңдеуі үшін ЛК құрылады, оның көмегімен оның «шоқ» толқындық шешімін табу мүмкіндігі пайда болады.

Дисперсиясыз (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеуінің Лакс көрінісі

Осы бөлімде дисперсиясыз (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеуі үшін ЛК-сін табамыз. Алдыңғы бөлімде табылған дисперсиясыз (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеуінің ЛК табу үшін (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеуінің ЛЖ-рын құрауыштары бойынша (116)-(117) теңдеулерді қарастырып [116, p. 020039; 117, p. 060022; 118, p. 012004; 134, 135], келесі қойылым алынады:

$$\Phi_1 = \xi_1 e^{\frac{i}{\varepsilon}\left[F+\lambda^2 x\right]}, \quad \Phi_2 = \xi_2 e^{\frac{i}{\varepsilon}\left[F+\lambda^2 x-\partial_x^{-1}v\right]}, \quad q = \sqrt{u}e^{\frac{i}{\varepsilon}\partial_x^{-1}v}, \tag{216}$$

мұнда F, u, v, ξ_1, ξ_2- нақты функциялар. (116)-(117) теңдеулердің масштабты түрлендіруден кейін, оларға (216) теңдеуге қойып, ЛЖ-ның бірінші жұбы алынады

$$F_x - \frac{\lambda^2 uv^2}{F_x - v} + 2\lambda^2 = 0$$

немесе

$$p + \frac{\lambda^2 uv^2}{p - v} + 2\lambda^2 = 0,$$

мұнда $p = F_x$.

Енді ЛЖ-ның екінші жұбы табылады. Ол үшін алынған ЛЖ-н (211) теңдеуге қойып, алынған теңдеу x бойынша дифференциалданады

$$F_{tx} - F_{xy} + \frac{u_x}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{uv}{(F_x - v)}\right]_x = 0 \tag{217}$$

немесе

$$p_t - p_y + \frac{1}{2}\left(\frac{uv}{p - v}\right)_x + \frac{u_x}{2} = 0. \tag{218}$$

Сонымен, (217) және (218) теңдеулері дисперсиясыз (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеуі үшін ЛК-сін құрайды. Алынған нәтижелер негізінде қарастырылып отырған теңдеудің «соққы» толқындық шешімін табу жоспарлануда.

3.2.2 Фокас-Ленэллс теңдеуінің спиндік жүйесінің дисперсиясыз шегі

ФЛ теңдеуінің спиндік жүйесінің дисперсиясыз шегін табу үшін, стереографиялық түрлендіру қарастырылады [136]

$$\omega = \frac{A^+}{1+A_3}.$$

Бұл жағдайда (47) теңдеуді ω стереографиялық түрлендіру тұрғысынан жазылады

$$i\omega_t - \beta\omega_{xx} + \beta\omega_{xt} + i(\beta^2 - 1)\omega_x = \frac{2\beta\bar{\omega}(\omega_x\omega_t - \omega_x^2)}{1+|\omega|^2}. \qquad (219)$$

Енді (219) теңдеудің дисперсиясыз шегін (квазиклассикалық шегін) табуға болады. Ол үшін (219) теңдеуде x және t бойынша масштабтық түрлендіру жүргізіп, келесідей айнымалыларды алмастыру орындалынады:

$$\omega = \sqrt{u}e^{\frac{iS}{\varepsilon}}, \qquad (220)$$

мұнда $u(x,t)-$ амплитуда;

$S(x,t)-$ классикалық әрекет, олар нақты мәнді функциялар болып табылады, сондай-ақ $|\omega|^2 = u.$

Енді алдымен (220) теңдеуді қажет аргументтер бойынша дифференциалдап, ε дәрежелері бойынша қарастырып, $S = \partial_x^{-1}\upsilon$ белгілеу жасалынады

$$\upsilon_t + \beta(\upsilon_x\gamma + \upsilon\upsilon_t - 2\upsilon\upsilon_x) + (\beta^2 - 1)\upsilon_x - \left(\frac{2\beta u\upsilon\gamma}{1+u}\right)_x + \left(\frac{\beta u\upsilon^2}{1+u}\right)_x = 0, \qquad (221)$$

$$u_t + 2\beta(u\upsilon)_x + 2\beta(u\upsilon)_t + \beta(\gamma u_x - \upsilon u_t) + (\beta^2 - 1)\upsilon_x - \frac{2\beta u}{1+u}(u_x\gamma + u_t\upsilon - 2u_x\upsilon) = 0. \qquad (222)$$

бұл жердегі $\gamma = \partial_t^{-1}\upsilon_t.$

Осылайша, (221) және (222) теңдеулері – ізделінді (1+1)-өлшемді ФЛ теңдеуінің дисперсиясыз спиндік жүйесі болып табылады, және оларда дисперсиялық мүшелердің жоқтығы айқын.

3.3 Комплексті байланысқан дисперсиясыз жүйенің спиндік жүйесінің солитонды шешімі

Осы бөлімде интегралданатын комплексті байланысқан дисперсиясыз (КБД) жүйесінің спиндік жүйесі геометриялық және калибрлік-теориялық әдістер арқылы зерттелінеді. КБД спиндік жүйесінің, қисықтықпен индуцирленген өзара әрекеттесулерді сипаттайтын дисперсиясыз динамикасы, үшөлшемді кеңістіктегі қисық ағындар арқылы геометриялық тұрғыдан

түсіндірілуі мүмкін екені көрсетілген. СТФ-сын пайдалана отырып, оның солитонды шешімін шығарамыз; сондай-ақ, КБД жүйесінің бөлшекті шешімін Кудрящев әдісі арқылы табамыз. Бұл нәтижелер сызықты емес спиндік жүйелерде симметрия, геометрия және солитон теориясы арасындағы өзара байланысты тереңдетеді.

КБД жүйесінің спиндік жүйесі келесі түрге ие [137]:

$$iA_t = \frac{1}{2k}[A, A_t]_x + \frac{i}{k^2}(\rho A)_x, \tag{223}$$

мұнда A – спин матрицасы;

k – нақты тұрақты;

ρ – геометриялық эффекттерді ескеретін скалярлық функция. ρ скалярлық функция келесі формуламен беріледі:

$$\rho = \sqrt{1 - \frac{\sigma k^2}{2} tr(A_t^2)} = \sqrt{1 - \sigma k^2 A_t^2}, \quad A = (A_1, A_2, A_3), \quad A^2 = 1$$

және спиндік өрістің динамикасындағы қисықтықпен туындалған модуляцияға аналогиялық рөл атқарады. Спиндік матрица келесі шектеуге бағынады: $A^2 = I$ және Паули матрицалары арқылы келесідей параметрленеді:

$$A = \begin{pmatrix} A_3 & \sigma A^- \\ A^+ & -A_3 \end{pmatrix}, \quad A^{\pm} = A_1 \pm iA_2,$$

нормалау шартымен: $\sigma(A_1^2 + A_2^2) + A_3^2 = 1$. Мұндағы $\sigma = \pm 1$ геометрия типін анықтайды: $\sigma = +1$ эллиптикалық (сфералық) жағдайға сәйкес келеді, ал $\sigma = -1$ гиперболалық жағдайға сәйкес келеді.

Енді (223) теңдеудің қарапайым бір солитонды шешімін ұсынайық. Бұл шешім сәйкес келетін КБД жүйесінің шешімін пайдалану арқылы құрастырылған. КБД жүйенің түрі

$$q_{xt} - \rho q = 0,$$
$$\rho_x + 0.5(|q|^2)_t = 0,$$

мұнда q – комплексті функция. КБД жүйесі үшін бастапқы шешім: $q = 0, \quad \rho = 1$. Демек $U_2 = -i\lambda x\sigma_3, \quad V_2 = \frac{i}{4\lambda} t\sigma_3$.

Содан кейін сәйкес бетті құру үшін СТФ-сын [32, p. 050201] қолданамыз. Осы тәсілді пайдалана отырып, нақты бір солитондық беттің шешімі келесі өрнекпен беріледі:

$$r_1 = \frac{b}{(1-a)^2+b^2} sechR\cos W, \qquad r_2 = \frac{b}{(1-a)^2+b^2} sechR\sin W,$$

$$r_3 = \frac{b}{(1-a)^2+b^2}\tanh R + x + t,$$

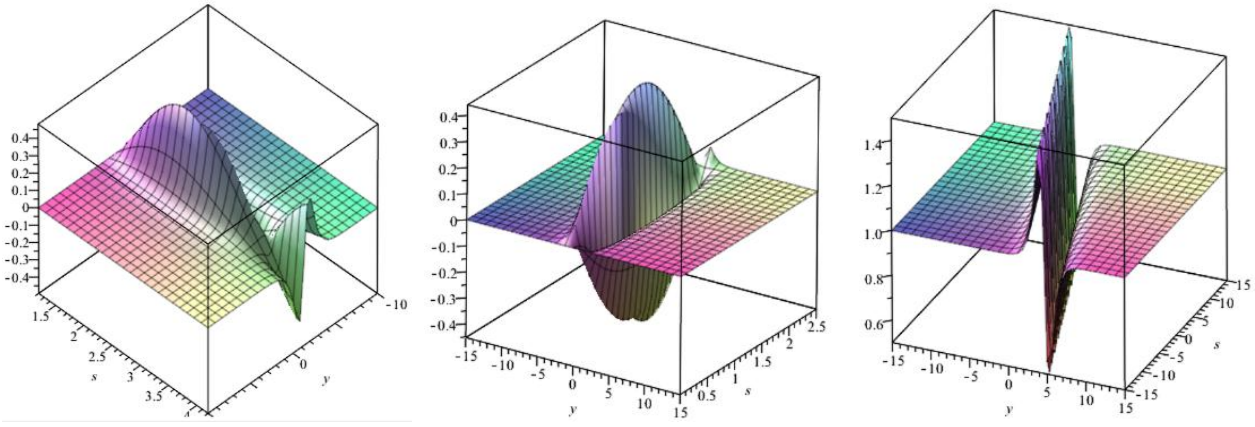
мұнда функциялар R және W келесі түрде анықталады:

$$R = bx + \frac{b}{a^2+b^2}t, \quad W = (1-a)x + \left(1+\frac{a}{a^2+b^2}\right)t.$$

Бұл бет шешімі (237) теңдеуі үшін бір солитонды шешімді құруда пайдаланылуы мүмкін. A спин векторының құрауыштары бет туындылары арқылы алынады:

$$A_1 = r_{1x}, \quad A_2 = r_{2x}, \quad A_3 = r_{3x}.$$

Бұл құрауыштар солитон бетінен туындайтын спиндік өрістің эволюциясын сипаттайды. A_1, A_2 және A_3 құрауыштардың уақыт бойынша эволюциясы 25-суретте көрсетілген.



а ә б

Сурет 26 – (223) теңдеудің бір солитонды шешімінен алынған $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ спиндік вектор құрауыштарының $a = 0.5$, $b = 1$, $x \in [-10,10]$ және $t \in [-5,5]$ үшін графиктері

26-суретте солитондық беттің шешімінен алынған A_1, A_2 және A_3 спин векторының құрауыштарының 3D графиктері көрсетілген. Бұл құрауыштар (223) теңдеуіндегі солитонның кеңістіктік құрылымын және эволюциясын сипаттайды. Параметрлердің қолданылған мәндері: $a = 0.5$, $b = 1$, $x \in [-10,10]$ және $t \in [-5,5]$: а) A_1 құрауышы x осі бойымен локализацияланған

тербелістерді көрсетеді, бұл r_1 бағыты бойынша солитонның қоршаушы қисықты сипаттайды; ә) A_2 құраушысы солитонның көлденең айналмалы қозғалысын көрсетеді, бұл оның ішкі спиндік құрылымына тән. (б) A_3 құраушысы көлденең профильді көрсетеді, ол созылмалы поляризацияны бейнелейді және көбінесе спиндік тізбектер модельдерінде намагниттену бағыты ретінде интерпретацияланады.

Бөлім бойынша қорытынды

Осы бөлімде ФЛ теңдеуі үшін СТФ-сын қолдана отырып, 1ФФ және 2ФФ беттері табылды. 2ФФ беті тұрақты беттің геометриялық қасиеттерін зерттеуде тиімді құрал болып, беттің жанама жазықтықтан ауытқу дәрежесі мен түрін сипаттайтын маңызды геометриялық шамаларды анықтауға мүмкіндік береді. Осы формаларды пайдаланып, беттің Гаусс қисықтығы есептеліп, бет ауданы анықталды. Сонымен қатар, ФЛ теңдеуі мен оның спиндік жүйесінің дисперсиясыз шектері зерттеліп, алынған ЛК-тері олардың интегралданатын құрылымын дәлелдеп, солитонды шешімдерді табуға мүмкіндік беретіндігі көрсетілді. Интегралданатын КБД жүйесінің спиндік жүйесі үшін бір солитонды шешім алынған. СТФ арқылы бет туындылары негізінде спин векторының құрауыштары анықталып, олардың кеңістіктегі құрылымы, локализациясы, көлденең айналмалы қозғалысы және поляризация профилі сипатталды. Бұл нәтижелер сызықты емес спиндік жүйелердің геометриялық және физикалық қасиеттерін терең түсінуге мүмкіндік береді. Қорытындылай келе, бөлім ФЛ теңдеулері мен олардың спиндік жүйелерінің геометриялық құрылымдарын, дисперсиясыз режимдегі эволюциясын және солитондық шешімдерін үйлесімді түрде біріктіріп, теориялық және қолданбалы физикадағы маңызды аспектілерін ашып көрсетті.

ҚОРЫТЫНДЫ

Осы жұмыста сызықты емес Шредингер типті теңдеулер мен олардың спиндік жүйелерінің интегралданатын қасиеттері, геометриялық құрылымдары және солитонды шешімдері жан-жақты зерттелді. Зерттеу нәтижелері математикалық физика, оптика, плазма физикасы, конденсацияланған заттар физикасы салаларында маңызды қолданбалы мәнге ие.

Бірінші бөлімде (1+1)-өлшемді ФЛ және ТСЕШТ-лері қарастырылып, олардың ДТ-лері арқылы нақты солитонды шешімдері құрылды. Бұл шешімдер ультра қысқа сызықты емес жарық импульстерінің оптикалық талшықтардағы таралуын сипаттайды, мысалы, телекоммуникациялық жүйелерде сигналдардың дисперсиясыз берілуін модельдеуге қолданылады. Сонымен қатар, жоғары ретті СЕШТ-нің бризерлер мен қиратушы толқын шешімдері алынған, бұл импульстік лазерлердің өзара әрекеттесуінде және плазмалық толқындардың динамикасында локализацияланған құрылымдардың пайда болуын сипаттайды. ФЛ теңдеулерінің спиндік жүйелері үшін алынған солитонды және қума толқын шешімдері кванттық спин тізбектерінде немесе магниттелген бозондық конденсаттардағы динамиканы модельдеуге мүмкіндік береді. Мысалы, бұл шешімдер бозондық конденсаттағы квази бөлшектердің біртұтас қозғалуы мен олардың өзара әсерлесуін көрсету үшін қолданылады.

Екінші бөлімде (2+1)-өлшемді және екі компонентті (2+1)-өлшемді ФЛ теңдеулері алынды. Хирота әдісі мен ДТ арқылы бір және екі солитонды

шешімдер алынды. Бұл нәтижелер көп компонентті оптикалық сигналдардың таралуын, спиндік-орбиталық өзара әрекеттесулерді және плазмадағы көп өлшемді толқындық құрылымдарды сипаттайды. Бұл бөлім жоғары өлшемді физикалық жүйелердің динамикасын, олардың интегралданатын табиғатын және локализацияланған құрылымдардың тұрақтылығын түсінуге маңызды үлес қосады.

Үшінші бөлімде ФЛ теңдеулері мен олардың спиндік жүйелерінің геометриялық құрылымдары және дисперсиясыз шектері зерттелді. СТФ арқылы беттердің бірінші және екінші фундаменталды формалары, бет ауданы және Гаусс қисықтығы есептелді. Бұл нәтижелер локализацияланған солитондық құрылымдардың кеңістіктегі қисықтығын, тұрақтылығын және өзара байланысын сипаттайды. Дисперсиясыз шектерде алынған ЛК-тері «соққы» типті толқындардың пайда болуын, олардың таралу жылдамдығы мен локализациясын көрсетеді. Мысалы, бұл модельдер гидродинамикадағы шок толқындардың таралуын, оптикалық талшықтардағы импульстік өзара әрекеттесуді және конденсатталған заттардағы спиндік тізбектердің динамикасын сипаттауда қолданылады. КБД жүйелер үшін алынған спиндік жүйенің бір солитонды шешімдері спин векторының кеңістіктегі құрылымын, локализациясын және поляризация профилін толық сипаттайды, бұл кванттық ақпаратты беру және өңдеу жүйелерінде маңызды.

Жалпы алғанда, зерттеу барысында ФЛ теңдеулері мен олардың спиндік жүйелерінің интегралданатын табиғаты, солитондық құрылымы, геометриялық сипаттары және дисперсиясыз режимдегі эволюциясы біртұтас түрде қарастырылды. Алынған нәтижелер нақты физикалық жүйелерде локализацияланған толқындардың пайда болуын, олардың динамикалық тұрақтылығын және өзара әрекеттесуін сипаттауға мүмкіндік береді. Сонымен қатар, бұл жұмыс математикалық физика мен дифференциалдық геометрия әдістерін біріктіре отырып, теориялық модельдердің қолданбалы физикадағы рөлін айқындайды және болашақ эксперименталды және теориялық зерттеулер үшін кеңейтілген методологиялық негіз ұсынады.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1 Russell J.S. Report on Waves // Report of the 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science. – London, 1845. – P. 90-311.

2 Korteweg D.J., de Vries G. On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves // Philosophical Magazine. – 1895. – Vol. 39. – P. 422-443.

3 Ablowitz M.J., Segur H. Solitons and the Inverse Scattering Transform. SIAM. – Philadelphia, 1981. – 425 p.

4 Agrawal G.P. Nonlinear Fiber Optics. – Ed. 5th. – Waltham: Academic Press, 2013. – 648 p.

5 Sulem C., Sulem P.L. The Nonlinear Schrödinger Equation: Self-Focusing and Wave Collapse. – NY.: Springer, 1999. – 350 p.

6 Hasegawa A., Tappert F. Transmission of Stationary Nonlinear Optical Pulses in Dispersive Dielectric Fibers. I. Anomalous Dispersion // Applied Physics Letters. – 1973. – Vol. 23, Issue 3. – P. 142-144.

7 Kivshar Y.S., Agrawal G.P. Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals. – Waltham: Academic Press, 2003. – 540 p.

8 Gerdjikov V.S., Grahovski G.G. Soliton Solutions of the Fokas-Lenells Equation // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. – 2010. – Vol. 43, Issue 43. – P. 434015.

9 Malomed B.A. Multidimensional Solitons: Theory and Experiments // Physics Reports. – 2002. – Vol. 339. – P. 1-77.

10 Turitsyn S.K., Akhmediev N., Soto-Crespo J.M. Multidimensional Solitons: Physics and Applications // Physics Reports. – 2012. – Vol. 521, Issue 4. – P. 135-203.

11 Vinayagam P.S. et al. Collisional Dynamics of Solitons and Pattern Formation in an Integrable Cross Coupled Nonlinear Schrödinger Equation with Constant Background // Romanian Reports in Physics. – 2025. – Vol. 77, Issue 1. – P. 101-1-101-14.

12 Serikbayev N., Saparbekova A. Symmetry and conservation laws of the (2+1)-dimensional nonlinear schrödinger-type equation // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. – 2023. – Vol. 20, Issue 11. – P. 2350172.

13 Ахмедиев Н.Н., Корнеев В.И. Модуляционная неустойчивость и периодические решения нелинейного уравнения Шрёдингера // Теоретическая и математическая физика. – 1986. – Т. 69, №2. – С. 189-194.

14 Ma Y.-C. Perturbed Plane Wave Solutions of the Cubic Schrödinger Equation // Studies in Applied Mathematics. – 1979. – Vol. 60, Issue 1. – P. 43-58.

15 Липовский В.Д., Широков А.В. Пример калибровочной эквивалентности многомерных интегрируемых систем // Функциональный анализ и его приложения. – 1989. – Т. 23, №3. – С. 65-66.

16 Saleem U., Hasan M. Quasideterminant Solutions of the Generalized Heisenberg Magnet Model // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. – 2010. – Vol. 43, Issue 4. – P. 045204.

17 Huang N.-N., Xu B. Darboux Transformation Method for Finding Soliton Solutions of the Landau-Lifshitz Equation of a Classical Heisenberg Spin Chain // Communications in Theoretical Physics. – 1989. – Vol. 12. – P. 121-126.

18 Zhang Z., Zhu H., Li D. Chirped Optical Soliton Perturbation of Fokas-Lenells Equation with Full Nonlinearity // Advances in Difference Equations. – 2020. – Vol. 2020, Issue 1. – P. 409.

19 Ling L., Zhu L. A Vector Fokas-Lenells System from the Coupled Nonlinear Schrödinger Equations // Journal of Nonlinear Mathematical Physics. – 2015. – Vol. 22. – P. 276-291.

20 Kundu A., Chowdhury A. Quiescent Optical Solitons for Fokas–Lenells Equation with Nonlinear Chromatic Dispersion and Self-Phase Modulation // The European Physical Journal Plus. – 2024. – Vol. 139, Issue 6. – P. 523.

21 Ablowitz M. J., Clarkson P. A. Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering. – Cambridge: Cambridge University Press, 1991. – 510 p.

22 Faddeev L.D., Takhtajan L.A. Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons. – Berlin: Springer, 1987. – 592 p.

23 Xu S., He J., Wang L. The Darboux Transformation of the Derivative Nonlinear Schrödinger Equation // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. – 2011. – Vol. 44, Issue 30. – P. 305203.

24 Zahran E.H.M., Ahmad H., Rahaman M. et al. Soliton Solutions in (2+1)-Dimensional Integrable Spin Systems: An Investigation of the Myrzakulov-

Lakshmanan Equation-II // Optics and Quantum Electronics. – 2024. – Vol. 56, Issue 4. – P. 895.

25 Lakshmanan M. Continuum Spin System as an Exactly Solvable Dynamical System // Physics Letters A. – 1977. – Vol. 61. – P. 53-54.

26 Myrzakulov R., Nugmanova G., Yesmakhanova K. et al. Generalized Heisenberg Ferromagnet Systems with Self-Consistent Potentials // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. – 2016. – Vol. 13, Issue 9. – P. 1550134.

27 Dauxois T., Peyrard M. Physics of Solitons. – Cambridge, 2006. – 432 p.

28 Fokas A.S. On a Class of Physically Important Integrable Equations // Physica D. – 195. – Vol. 87. – P. 145-150.

29 Lenells J. et al. On a Novel Integrable Generalization of the Nonlinear Schrödinger Equation // Nonlinearity. – 2009. – Vol. 22, Issue 11. – P. 11-27.

30 Lenells J. Exactly Solvable Model for Nonlinear Pulse Propagation in Optical Fibers // Studies in Applied Mathematics. – 2009. – Vol. 123. – P. 215-232.

31 Lenells J. Dressing for a Novel Integrable Generalization of the Nonlinear Schrödinger Equation // J of Nonlinear Science. – 2010. – Vol. 20. – P. 709-722.

32 Geng X.-G., Guo F.-Y., Zhai Y.-Y. Two Integrable Generalizations of WKI and FL Equations: Positive and Negative Flows, and Conservation Laws // Chinese Physics B. – 2020. – Vol. 29, Issue 5. – P. 050201.

33 Lenells J. The Derivative Nonlinear Schrödinger Equation on the Half-Line // Physica D. – 2009. – Vol. 240. – P. 512-530.

34 Matsuno Y. Multisoliton Solutions of the Fokas-Lenells Equation and Their Properties // J of the Physical Society of Japan. – 2012. – Vol. 81, Issue 3. – P. 034002.

35 Kaup D.J., Newell A.C. An Exact Solution for a Derivative Nonlinear Schrödinger Equation // Journal of Mathematical Physics. – 1978. – Vol. 19, Issue 4. – P. 798-801.

36 Mjølhus E. On the Modulational Instability of Hydromagnetic Waves Parallel to the Magnetic Field // Journal of Plasma Physics. – 1976. – Vol. 16, Issue 3. – P. 321-334.

37 Spatschek K.H. Nonlinear Alfvén Waves in Collisionless Plasmas // Physics of Fluids. – 1977. – Vol. 20, Issue 9. – P. 1454-1459.

38 Chen H.H. et al. Integrability of Nonlinear Hamiltonian Systems by Inverse Scattering Method // Physica Scripta. – 1979. – Vol. 20, Issue 3-4. – P. 490-492.

39 Zheng W., Liu Y. Hierarchical Structure and N-Soliton Solutions of the Generalized Gerdjikov-Ivanov Equation via Riemann–Hilbert Problem // Nonlinear Dynamics. – 2025. – Vol. 113, Issue 1. – P. 12021-12035.

40 Ablowitz M.J., Musslimani Z.H. Nonlinear Dispersive Waves: Asymptotic Analysis and Solitons. – Cambridge, 2023. – 456 p.

41 Hirota R. The Direct Method in Soliton Theory. – Cambridge, 2004. – 256 p.

42 Rogers C., Schief W.K. Bäcklund and Darboux Transformations: Geometry and Modern Applications in Soliton Theory. – Cambridge, 2002. – 464 p.

43 Zhang M., He S., Lv S. A vector Fokas-Lenells system: soliton solutions and integrable spin model connection // Journal of Mathematical Physics. – 2017. – Vol. 58, Issue 8. – P. 083507.

44 Belokolos E.D., Bobenko A.I., Enol'skii V.Z. et al. Algebro-Geometric Approach to Nonlinear Integrable Equations. – Berlin, 1994. – 552 p.

45 Yuan R.-r., Shi Y., Zhao S.-l. et al. The mKdV Equation under the Gaussian White Noise and Wiener Process: Darboux Transformation and Stochastic Soliton Solutions // Chaos, Solitons & Fractals. – 2024. – Vol. 181, Issue 1. – P. 114709.

46 Matveev V.B., Salle M.A. Darboux Transformations and Solitons. – Berlin, 1991. – 288 p.

47 Gu C.H., Hu H.S., Zhou Z.X. Darboux Transformation in Soliton Theory and Its Geometric Applications. – Berlin, 2005. – 304 p.

48 He J., Xu S., Porsezian K. Rogue Waves of the Fokas-Lenells Equation // Journal of the Physical Society of Japan. – 2012. – Vol. 81, Issue 12. – P. 124007.

49 Нугманова Г.Н., Таттибеков К.С., Жасыбаева М.Б. Кратное преобразование Дарбу для (2+1)-мерного обобщенного уравнения Ландау-Лифшица // Вестник Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева. – 2014. – Т. 4, №101. – С. 326-332.

50 Zhassybayeva M., Nugmanova G., Mamyrbekova G. et al. One-soliton solution of Heisenberg ferromagnetic model with self-consistent potentials // Procced. internat. conf. on Global Issues in Multidisciplinary Academic Research. – Dubai, 2015. – P. 47-49.

51 Xue L., Zhang Q. Soliton Solutions of Derivative Nonlinear Schrödinger Equations: Conservative Schemes and Numerical Simulation // Physica D: Nonlinear Phenomena. – 2024. – Vol. 470, Part A. – P. 134372.

52 Zhang Y., Guo L., He J. et al. Darboux Transformation of the Second-Type Derivative Nonlinear Schrödinger Equation // Letters in Mathematical Physics. – 2015. – Vol. 105. – P. 853-891.

53 Zhang H.-Q. Darboux Transformation and N-Soliton Solution for the Coupled Modified Nonlinear Schrödinger Equations. – Shanghai, 2012. – 128 p.

54 Akhmediev N., Eleonskii V.M., Kulagin N.E. Exact First-Order Solutions of the Nonlinear Schrödinger Equation // Theoretical and Mathematical Physics. – 1987. – Vol. 72. – P. 809-818.

55 Kuznetsov E.A. Solitons in a Plasma // Soviet Physics JETP. – 1976. – Vol. 41. – P. 164-169.

56 Bludov Y.V., Konotop V.V., Akhmediev N. Matter Rogue Waves // Physical Review A. – 2009. – Vol. 80, Issue 3. – P. 033610.

57 Mollenauer L.F., Stolen R.H., Gordon J.P. et al. Extreme Picosecond Pulse Narrowing by Means of Soliton Effect in Single-Mode Optical Fibers // Optics Letters. – 1983. – Vol. 8. – P. 289291.

58 Samet H.C., Sakthivinayagam P., Al Khawaja U. et al. Peregrine Soliton Management of Breathers in Two Coupled Gross–Pitaevskii Equations with External Potential // Physical Wave Phenomena. – 2020. – Vol. 28. – P. 305-312.

59 Ankiewicz A., Soto-Crespo J.M., Akhmediev N. Rogue Waves and Rational Solutions of the Hirota Equation // Physical Review E. – 2010. – Vol. 81. – P. 046602.

60 Guo B., Ling L., Liu Q.P. Nonlinear Schrödinger Equation: Generalized Darboux Transformation and Rogue Wave Solutions // Physical Review E. – 2012. – Vol. 85, Issue 2. – P. 026607.

61 Sasa N., Satsuma J. New-Type of Soliton Equations—An Extension of the Nonlinear Schrödinger Equation // Journal of the Physical Society of Japan. – 1991. – Vol. 60, Issue 2. – P. 409-417.

62 YongHui K., Bolin M., Xin W. Higher-Order Soliton Solutions for the Sasa–Satsuma Equation Revisited via Difference Method // Journal of Nonlinear Mathematical Physics. – 2023. – Vol. 30. – P. 1821-1833.

63 Sameut H.C., Benarous M., Asad-uz-Zaman M. et al. Effect of Third-Order Dispersion on the Solitonic Solutions of the Schrödinger Equations with Cubic Nonlinearity // Advances in Mathematical Physics. – 2014. – Vol.l 2014, Issue 5. – P. 323591.

64 Ling L., Zhao L., Guo B. Darboux Transformations and Exact Solutions of Nonlinear Schrödinger-Type Equations. – Berlin, 2018. – 220 p.

65 Taibi Z., Sameut H.C., Zhassybayeva M. et al. Exploration of time-dependent dispersion and nonlinearity management in stabilization and transition of localized structures in nonlinear optical media // Symmetry. – 2025. – Vol. 17, Issue 12. – P. 2165.

66 Al Khawaja U., Al Sakkaf L. Handbook of Exact Solutions to the Nonlinear Schrödinger Equations. – Bristol, 2024. – 312 p.

67 Solli D.R., Ropers C., Koonath P. et al. Optical Rogue Waves // Nature. – 2007. – Vol. 450. – P. 1054-1057.

68 Kibler B., Fatome J., Finot C. et al. The Peregrine Soliton in Nonlinear Fibre Optics // Nature Physics. – 2010. – Vol. 6. – P. 790-795.

69 Dudley J.M., Genty G., Eggleton B.J. Harnessing and Control of Optical Rogue Waves in Supercontinuum Generation // Optics Express. – 2008. – Vol. 16. – P. 3644-3651.

70 Lakshmanan M. et al., Myrzakulov R. Integrable Spin Systems and Their Gauge Equivalence to Soliton Equations // Physics Letters A. – 1992. – Vol. 172. – P. 279-287.

71 Myrzakulov R., Mamyrbekova G., Nugmanova G. et al. Integrable (2+1)-Dimensional Spin Models with Self-Consistent Potentials // Symmetry. – 2015. – Vol. 7, Issue 3. – P. 1352-1375.

72 Yersultanova Z.S., Zhassybayeva M., Nugmanova G. et al. Integrable Motion of Curves in Self-Consistent Potentials: Relation to Spin Systems and Soliton Equations // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. – 2016. – Vol. 13, Issue 1. – P. 1650002.

73 Myrzakul A., Myrzakulov R. Integrable Motion of Two Interacting Curves, Spin Systems and the Manakov System // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. – 2017. – Vol. 14, Issue 7. – P. 1750121.

74 Жасыбаева М.Б., Нугманова Г.Н. Спиновая система, эквивалентная интегрируемому уравнению Фокаса-Ленэллса // Вестник Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева. – 2018. – №1(122). – С. 53-57.

75 Zhassybayeva M., Bekova G., Yesmakhanova K. et al. Integrable motions of curves of the induced Fokas-Lenells equation // Optik. – 2023. – Vol. 286. – P. 170979.

76 Жасыбаева М.Б., Есмаханова К.Р. Преобразование Дарбу и точное односолитонное решение уравнения Фокаса-Ленэллса // Вестник Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева. – 2020. – №3(132). – С. 8-13.

77 Жасыбаева М.Б. Односолитонное решение уравнения M-LXXII // Матер. 13-й междунар. науч. конф. студ. и молод. учен. «Наука и образование - 2018». – Астана, 2018. – С. 396-399.

78 Жасыбаева М.Б., Мырзакулова Ж.Р. Преобразование Дарбу и солитонное решение производного нелинейного уравнения Шрёдингера первого типа // Вестник Торайгыров университета. – 2025. – №3. – С. 126-137.

79 Zhassybayeva M., Myrzakulova Z., Yesmakhanova K. Modified Fokas-Lenells Equation: Self-Consistent Sources and Soliton Solutions of the Spin and (2+1)-Dimensional Models // Symmetry. – 2025. – Vol. 17, Issue 7. – P. 1961.

80 Zhou R., Hao H.-Q., Jia R.-R. New soliton solutions for the (2+1)-dimensional Schrödinger-Maxwell-Bloch equation // Superlattices Microstruct. – 2018. – Vol. 113. – P. 409-418.

81 Burdik C., Shaikhova G., Rakhimzhanov B. Soliton solutions and travelling wave solutions for the two-dimensional generalized nonlinear Schrödinger equations // Eur. Phys. J. Plus. – 2021. – Vol. 136. – P. 1095.

82 Yesmakhanova K., Bekova G., Shaikhova G. et al. Soliton solutions of the (2+1)-dimensional complex modified Korteweg-de Vries and Maxwell-Bloch equations // J. Phys. Conf. Ser. – 2016. – Vol. 738. – P. 012018.

83 Shaikhova G.N., Kutum B.B., Myrzakulov R. Periodic traveling wave bright and dark soliton solutions of the (2+1)-dimensional complex modified Korteweg–de Vries system by using three different methods // AIMS Math. – 2022. – Vol. 7. – P. 18948-18970.

84 Yu F., Feng L., Li L. Darboux transformations for super-Schrödinger equation super-Dirac equation and their exact solutions // Nonlinear Dyn. – 2017. – Vol. 88. – P. 1257-1271.

85 Ling L. et al. General soliton solutions to a coupled Fokas-Lenells equation // Nonlinear Anal. Real World Appl. – 2018. – Vol. 40. – P. 185-214.

86 Ling L., Liu Q.P. Darboux transformation for a two-component derivative nonlinear Schrödinger equation // J. Phys. A: Math. Theor. – 2010. – Vol. 43. – P. 434023.

87 Yang J.-M., Li C.-Z., Li T.-T. et al. Darboux transformation and solutions of the two-component Hirota–Maxwell-Bloch system // Chin. Phys. Lett. – 2013. – Vol. 30. – P. 104201.

88 Song C.-Q., Xiao D.-M., Zhu Z.-N. Soliton and rogue wave solutions of two-component nonlinear Schrödinger equation coupled to the Boussinesq equation // Chin. Phys. B. – 2017. – Vol. 26. – P. 100204.

89 Geng X., Li Y., Wei J. et al. Darboux transformation of a two-component generalized Sasa–Satsuma equation and explicit solutions // Math. Methods Appl. Sci. – 2021. – Vol. 44. – P. 12727-12745.

90 Zhassybayeva M., Yesmakhanova K. The construction of the (2+1)-dimensional integrable Fokas-Lenells equation and its bilinear form by Hirota method // International Conference on Technology, Engineering and Science. – 2018. – Vol. 4. – P. 61-66.

91 Zhao Q., Song H., Li X. Higher-order rogue wave solutions of the (2+1)-dimensional Fokas-Lenells equation // Wave Motion. – 2022. – Vol. 115. – P. 103065.

92 Guan Y., Li X., Zhao Q. Interaction wave solutions of the (2+1)-dimensional Fokas-Lenells equation // Phys. Scr. – 2021. – Vol. 100. – P. 045219.

93 Zhao Q., Zhang X., Li X. Classification of solutions for the (2+1)-dimensional Fokas-Lenells equations based on bilinear method and Wronskian technique // Nonlinear Dyn. – 2025. – Vol. 113. – P. 2569-2597.

94 Жасыбаева М.Б. Об одном интегрируемом уравнении Фокаса-Ленэллса с самосогласованным источником // Матер. 14-й междунар. науч. конф. студ., магистр. и молод. учен. «Ломоносов – 2018». – Астана, 2018. – С. 19-21.

95 Zhassybayeva M., Yesmakhanova K. Soliton solutions for the (2+1)-dimensional integrable Fokas-Lenells equation. News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. – 2019. – Vol. 6, Issue 328. – P. 130-137.

96 Борзых А.В. Метод Хироты и солитонные решения многомерного нелинейного уравнения Шредингера // Сибирский математический журнал. – 2002. – Т. 43, №2. – С. 267-270.

97 Matsuno Y. A direct method of solution for the Fokas-Lenells derivative nonlinear Schrödinger equation: I. Bright soliton solutions // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. – 2012. – Vol. 45. – P. 23202.

98 Matsuno Y. Multisoliton solutions of the derivative nonlinear Schrödinger equation by Hirota's method // Journal of the Physical Society of Japan. – 2012. – Vol. 81, Issue 3. – P. 034002.

99 Gerdjikov V.S., Ivanov R.I. Multicomponent Fokas–Lenells equations on Hermitian symmetric spaces // Nonlinearity. – 2021. – Vol. 34. – P. 939.

100 Zhao H., Song Z., Li D. Darboux transformation and soliton solutions for the multi-component Fokas-Lenells system // Nonlinear Dyn. – 2022. – Vol. 109. – P. 1243-1257.

101 Zhou Y., Chen S., Baronio F. et al. General Rogue Wave Solutions of the Coupled Fokas–Lenells Equations and Non-Recursive Darboux Transformation // Proceedings of the Royal Society A. – 2019. – Vol. 475, Issue 2224. – P. 20180806.

102 Müller-Hoissen F., Ye R. Miura Transformation in Bidifferential Calculus and a Vectorial Darboux Transformation for the Fokas-Lenells Equation // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. – 2023. – Vol. 56, Issue 10. – P. 105201.

103 Kang Z.-Z., Xia T.-C., Ma X. Darboux transformation and exact solutions for a four-component Fokas–Lenells equation // Results in Physics. – 2021. – Vol. 31. – P. 105027.

104 Lin X., Geng X. Multi-Soliton Solutions for the Coupled Fokas-Lenells System via Riemann–Hilbert Approach // Chinese Physics Letters. – 2022. – Vol. 35, Issue 7. – P. 070201.

105 Bai Y.-S., Su P.-X., Ma W.-X. N-Fold Darboux Transformation for the Classical Three-Component Nonlinear Schrödinger Equations and Its Exact Solutions // Mathematics. – 2021. – Vol. 9. – P. 733.

106 Ling L., Guo B., Liu Q.P. Vector and Multi-Component Fokas–Lenells Systems: Darboux Transformations and Soliton Solutions // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. – 2017. – Vol. 50. – P. 345203.

107 Zhassybayeva M., Shaikhova G., Yesmakhanova K. et al. Darboux Transformation and Exact Soliton Solutions of the Two-Component (2+1)-Dimensional Fokas-Lenells Equation // Results in Physics. – 2025. – Vol. 79. – P. 108517.

108 Demiray S.T., Bayrakci U. Soliton Solutions for the Continuous Classical Heisenberg Ferromagnet Equation // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2018. – Vol. 64. – P. 35-65.

109 Ling L., Liu Q.P. Darboux Transformations and Exact Solutions of Nonlinear Schrödinger-Type Equations. – Berlin, 2018. – 220 p.

110 Lakshmanan M., Porsezian K., Daniel M. Effect of Discreteness on the Continuum Limit of the Heisenberg Spin Chain // Physics Letters A. – 1988. – Vol. 133. – P. 483-488.

111 Мырзакулов Е.М., Жасыбаева М.Б., Каирбаева М.А. Екі компонентті Фокас-Ленэллс теңдеуімен байланысқан екі қабатты спинді жүйе // Вестник Кокшетауского Университета имени Ш. Уалиханова. – 2022. – №1. – С. 4-14.

112 Myrzakulov R., Vijayalakshmi S., Nugmanova G. et al. A (2+1)-dimensional integrable spin model: Geometrical and gauge equivalent counterparts, solitons and localized coherent structures // J. Phys. Lett. A. – 1997. – Vol. 233. – P. 391.

113 Жасыбаева М.Б., Мырзакулова Ж.Р., Абеуова М. Преобразование Дарбу для двухслойного уравнения M-LXXII // Academic journal of physical and chemical sciences. – 2025. – №4. – С. 24-37.

114 Martina L., Myrzakul K., Myrzakulov R., Soliani G. Deformation surfaces, integrable systems and Chern-Simons theory // J. Math. Phys. – 2001. – Vol. 42, – P. 1397.

115 Doliwa A., Santini P.M. An Elementary Geometric Characterization of the Integrable Motions of Curves // Physics Letters A. – 1995. – Vol. 185. – P. 373-384.

116 Bekova G., Yesmakhanova K., Shaikhova G. Travelling wave solutions for the two-dimensional Hirota system of equations // AIP Conf. Proc. – 2018. – Vol. 1997. – P. 020039.

117 Bekova G., Yesmakhanova K., Myrzakulov R. et al. Exact solutions for the (2+1)-dimensional Hirota-Maxwell-Bloch system // AIP Conf. Proc. – 2017. – Vol. 1880, – P. 060022.

118 Bekova G., Yesmakhanova K., Myrzakulov R. et al. Lax representation and soliton solutions for the (2+1)-dimensional two-component complex modified Korteweg-de Vries equations // Journal of Physics: Conference Series. – 2017. – Vol. 804, – P. 012004.

119 Bekova G., Yesmakhanova K., Myrzakulov R. et al. Darboux transformation and soliton solution for the (2+1)-dimensional complex modified Korteweg-de Vries equations // Journal of Physics: Conference Series. – 2017. – Vol. 936. – P. 012045.

120 Nugmanova G., Sagidullayeva Zh., Myrzakulov R. Hirota's method for a spin model with self-consistent potential // J. Phys.: Conf. Series. – 2017. – Vol. 804. – P. 012035.

121 Nugmanova G., Sagidullayeva Zh. Generalized spin model with vector potential and its solution // Bulletin of the Karaganda University. – 2017. – Vol. 86. – P. 91-96.

122 He J., Xu S., Porsezian K. Rogue waves of the Fokas–Lenells equation // Journal of the Physical Society of Japan. – 2012. – Vol. 81, Issue 12. – P. 124005.

123 Zhao P., Fan E. Reality problems for the algebro-geometric solutions of Fokas-Lenell hierarchy // https://arxiv.org/abs/1309.2368. 10.10.2025.

124 Zhao Y., Fan E. Inverse Scattering Transformation for the Fokas-Lenells Equation with Nonzero Boundary Conditions // Journal of Nonlinear Mathematical Physics. – 2021. – Vol. 28. – P. 38-52.

125 Coley A.A. Bäcklund and Darboux Transformations: The Geometry of Solitons : AARMS-CRM Workshop, June 4-9, 1999, Halifax, N.S., Canada. – Providence, 2001. – 436 p.

126 Pressley A. Elementary Differential Geometry. – Berlin, 2001. – 448 p.

127 Zhassybayeva M., Yesmakhanova K. Soliton surfaces induced by the Fokas-Lenells equation // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – Vol. 1416, Issue 1, – P. 012042.

128 Desjardins B. et al. Semiclassical Limit of the Derivative Nonlinear Schrödinger Equations. – Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. – 1998. – Vol. 25, Issue 4. – P. 567-590.

129 Brunelli J. C. Dispersionless Limit of Integrable Models // Brazilian Journal of Physics. – 2000. – Vol. 30, Issue 2. – P. 1-25.

130 Zhassybayeva M.B., Yesmakhanova K.R. The construction of the (2+1)-Dimensional integrable Fokas-Lenells equation and its bilinear form by Hirota method // Procced. internat. conf. on Technology, Engineering and Science (IConTES). – Antalya, 2018. – P. 61-67.

131 Kawata T., Inoue H. Exact Solutions of the Derivative Nonlinear Schrödinger Equation under the Semiclassical Approximation // Journal of the Physical Society of Japan. – 1978. – Vol. 44, Issue 6. – P. 1968-1976.

132 Myrzakulova Z., Myrzakulov R. Dispersionless Limits of Some Integrable Equations // https://arxiv.org/abs/1902.07806. 10.11.2025.

133 Zhassybayeva M., Yesmakhanova K. Dispersionless limit of the (1+1)-dimensional Fokas-Lenells equation // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – Vol. 1391, Issue 1, – P. 012103.

134 Zhassybayeva M. Бездисперсионный предел (2+1)-мерного интегрируемого уравнения Фокаса Ленэллса // Матер. 14-й междунар. науч. конф. студен. и молод. учен. – Астан, 2019. – P. 260-262.

135 Айжан А., Жасыбаева М.Б., Есмаханова К.Р. Представление Лакса бездисперсионного (2+1)-мерного уравнения Фокаса-Ленэллса // Анализдің, дифференциалдық теңдеулердің және алгебраның өзекті мәселелері (EMJ-2019). – Астана. – 2019. – Б. 72-73.

136 Жасыбаева М.Б., Абеуова М. Бездисперсионный предел интегрируемого уравнения M-LXXII // Матер. 20-й междунар. науч. конф. студ. и молод. учен. «Наука и образование - 2025». – Астана, 2025. – P. 224-226.

137 Nugmanova G., Bekova G., Zhassybayeva M. et al. Ferromagnet-type system: Integrable flows of curves/surfaces, soliton solutions, and equivalence // Symmetry. – 2025. – Vol. 17, Issue 7. – P. 1041.